

数学Ⅰ・A，Ⅱ・Bの指導における，発展的な学習の扱いについて

愛媛県立新居浜東高等学校 大西 健太
 愛媛県立北条高等学校 岩崎 恵女
 愛媛県立松山北高等学校 山田 一貴

はじめに

平成 24年度から他教科より選考して導入された新学習指導要領が5年目を迎えている。今年度は，各学校の数学Ⅰ・A，Ⅱ・Bの指導において，発展的な学習を扱っているかについて，各学校からご意見をいただき，今後の指導の参考にさせていただければと考え，この主題を設定した。

1 実施状況

教科書の中にある「研究」「発展」の内容を授業で取り扱っているかどうかを調査した。

数研出版の教科書には「研究」は『本文の内容に関連するやや程度の高い内容を扱いました。場合によっては省略して進むこともできます。』と、「発展」は『学習指導要領の数学Ⅰの範囲外の内容です。興味や関心に応じて選択して学習する発展的内容です。』と，記されている。

※ 高いレベルの教科書では，今回アンケートを行った内容の一部が，「研究」ではなく，通常の指導内容として記載されていた。「教科書に載っているので，通常授業で扱う」と回答された学校は，『扱う』の学校数として記載した。

2 数学Ⅰ・Aにおける取組について

『扱う』『一部のクラスで扱う』『扱わない』の割合と，扱う学校に関してはその理由を調べた。理由の選択肢は次の9つである。

- ア…紹介程度で扱う
- イ…通常の内容として扱う
- ウ…既習事項を発展させて応用力をつけるため
- エ…一貫性を持たせた系統的指導を行うため
- オ…副教材で取り扱うため
- カ…数学Ⅱに関連づけるため
- キ…興味・関心を持たせるため
- ク…課題学習につなげるため
- ケ…その他

(1) 数学Ⅰのアンケート結果

数学Ⅰのアンケート結果は以下の通りである。

① 3次式の展開

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

扱う 47%，一部で扱う 25%，扱わない 28%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	13	51	18	5		13			

② 3次式の因数分解

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

扱う 43%，一部で扱う 21%，扱わない 36%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	8	61	14	3		14			

③ 2重根号

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} \text{ を簡単 にせよ。}$$

扱う 31%，一部で扱う 28%，扱わない 41%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	3	47	47		3				

④ 絶対値の場合分け

$$|x-2| \text{ の絶対値を外せ。}$$

扱う 37%，一部で扱う 35%，扱わない 28%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	3	50	31	8	5	3			

⑤ 3つの集合の共通部分と和集合

$$A = \{3,6,9\}, B = \{1,2,3,6\}, C = \{2,4,6,8\} \text{ につ$$

いて， $A \cap B \cap C$ と $A \cup B \cup C$ の要素を書け。

扱う 31%，一部で扱う 24%，扱わない 45%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	13	48	30		3	3	3		

⑥ $\sqrt{2}$ が無理数であることを，背理法で証明する

扱う 35%，一部で扱う 16%，扱わない 49%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	7	53	29			4	7		

⑦ 「第1象限」「第2象限」という名前

扱う 62% , 一部で扱う 11% , 扱わない 27%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	20	67		3		10			

⑧ x 軸 (y 軸, 原点) に関して対称な点

扱う 54% , 一部で扱う 18% , 扱わない 28%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	10	64	8	5	3	5	5		

⑨ グラフの平行移動

2次関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p ,
 y 軸方向に q 平行移動すると, $y - q = f(x - p)$

扱う 33% , 一部で扱う 27% , 扱わない 40%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	3	58	27	6	3		3		

⑩ グラフの対象移動

2次関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸 (y 軸, 原点) に関して対称移動したグラフの式

扱う 33% , 一部で扱う 27% , 扱わない 40%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	6	55	27	6	3			3	

⑪ 放物線と直線の共有点の座標

扱う 46% , 一部で扱う 17% , 扱わない 37%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	3	70	15	9			3		

⑫ 絶対値を含む関数のグラフ

$y = |x - 1|$ のグラフをかけ。

扱う 29% , 一部で扱う 20% , 扱わない 51%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	4	51	30		4	7	4		

⑬ 三角形の内接円と面積

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると, $\triangle ABC$

の面積 S は, $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$

扱う 45% , 一部で扱う 27% , 扱わない 28%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	8	63	18	3	5	3			

⑭ ヘロンの公式

扱う 40% , 一部で扱う 19% , 扱わない 41%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	18	50	21	3			8		

⑮ 共分散という言葉

扱う 42% , 一部で扱う 20% , 扱わない 38%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	26	50	12	12					

⑯ 相関係数の定義

計算方法を教えるだけでなく, 定義に触れる。

扱う 42% , 一部で扱う 11% , 扱わない 47%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	21	45	21	7	3		3		

アンケート結果から分かるように, 「扱う」または, 「一部のクラスで扱う」と答えた学校の半数が「イ: 通常の内容として扱う」と回答している。次に多い理由は, 「ウ: 既習事項を発展させて応用力を付けるため」である。

①②⑦⑫のように, 数学Ⅱで学習する内容を先に扱う際には, 「カ: 数学Ⅱに関連づけるため」という理由が多い。

また, 「一部のクラスで扱う」と答えた学校では「ア: 紹介程度で扱う」という学校が多かった。

「授業時間に余裕があれば扱う」などのように, それぞれの先生方の判断で, 紹介程度で扱うのか, 学習時間をきちんと確保させるのかを分けている学校もあるようである。

(2) 数学 A のアンケート結果

数学 A のアンケート結果は以下の通りである。

① 重複を許して作る組合せ

3種類の果物から, 重複を許して5個にする。区切り棒2本と5つを並べて, $(3-1)+5C_5$

扱う 32% , 一部で扱う 21% , 扱わない 47%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	7	39	43		7		4		

② 立方体の色塗り

立方体の6面を6色で塗り分ける。底面固定で上面が5通り。側面は4色の円順列。 $5 \times (4 - 1)!$

扱う 39% , 一部で扱う 24% , 扱わない 37%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	3	38	35		21		3		

③ 原因の確率 $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

扱う 40% , 一部で扱う 22% , 扱わない 38%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	9	64	21		3		3		

④ 三角形の辺 (三角形の成立条件)

三角形の2辺の長さの和は他の1辺よりも大きく、2辺の長さの差は他の1辺よりも小さい

扱う 62% , 一部で扱う 8% , 扱わない 30%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	19	67	3	3	3		5		

⑤ 三角形の辺と角

$\triangle ABC$ において、 $b > c \Leftrightarrow \angle B > \angle C$

扱う 64% , 一部で扱う 13% , 扱わない 23%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	27	64	2	2			5		

⑥ 方べきの定理の逆

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つならば、4点A, B, C, D は1つの円周上にある。

扱う 51% , 一部で扱う 9% , 扱わない 40%

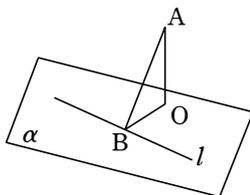
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	31	57	9		3				

⑦ 三垂線の定理

右の図において、

$OA \perp \alpha$, $OB \perp l$

ならば $AB \perp l$



扱う 28% , 一部で扱う 4% , 扱わない 68%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	35	47		18					

⑧ 正多面体の体積

正六面体から周りの立体を切り取って、正四面体と、正八面体の体積を求める。

扱う 19% , 一部で扱う 0% , 扱わない 81%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	40	30	20				10		

⑨ 正多面体の種類

正多面体が5種類であることを知る

扱う 52% , 一部で扱う 11% , 扱わない 37%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	47	26	6	3			18		

⑩ 最大公約数・最小公倍数の性質

最大公約数が12, 最小公倍数が72である2つの自然数の組を求める。

扱う 43% , 一部で扱う 20% , 扱わない 37%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	9	64	18	3	6				

⑪ 自然数の積と素因数の個数

108以下の自然数で、108と互いに素であるものの個数を求めよ。

扱う 33% , 一部で扱う 13% , 扱わない 54%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	12	52	16	4	12		4		

⑫ 和, 差, 積の余り

5^{100} を4で割ったときの余りを求めよ。

扱う 35% , 一部で扱う 15% , 扱わない 50%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	7	56	22	4	11				

⑬ 合同式

a を m で割った時の余りと、 b を m で割ったときの余りが等しいとき、 $a \equiv b \pmod{m}$

扱う 22% , 一部で扱う 9% , 扱わない 69%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
%	35	35	24	6					

数学Iと同様に、「扱う」または「一部のクラスで扱う」と答えた学校の半数が、「イ：通常の内容として扱う」と回答している。

数学Iとの違いは、2番目に多い理由が「ア：紹介程度で扱う」になっていることである。

また、「場合の数と確率」と「図形の性質」の領域では、「オ：副教材で取り扱うため」という理由で扱っている内容も多い。より多くの種類の問題を学習させたり、「違った考え方(別解)」を教えたりすることで、教科書で扱われている内容の理解が深まりやすい分野であるためであろう。

「場合の数と確率」と「図形の性質」と比べて、「整数の性質」領域の問題は、扱わないと回答した学校が多かった。

3 数学Ⅱ・Bにおける取組について

『扱う』『一部のクラスで扱う』『扱わない』の割合と、扱う学校に関してはその理由を調べた。理由の選択肢は次の8つである。

- ア…紹介程度で扱う
- イ…通常の内容として扱う
- ウ…既習事項を発展させて応用力をつけるため
- エ…一貫性を持たせた系統的指導を行うため
- オ…副教材で取り扱うため
- カ…数学Ⅲに関連づけるため
- キ…興味・関心を持たせるため
- ク…その他

(1) 数学Ⅱのアンケート結果

数学Ⅱのアンケート結果は以下の通りである。

① $(a+b+c)^n$ の展開式

$a^p b^q c^r$ の項の係数は $\frac{n!}{p!q!r!}$ ($p+q+r=n$)

扱う 42% , 一部で扱う 27% , 扱わない 31%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	11	58	25	6				

② 代入による恒等式の係数決定

等式 $2x^2 - 7x - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

が恒等式になるような、定数 a, b, c を求める問題で、 x に 0, 1, 2 を代入して、連立三元一次方程式を作って考える。

扱う 46% , 一部で扱う 24% , 扱わない 30%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	17	57	20	3			3	

③ 2次方程式の実数解の符号

α, β が異なる2つの正の解をもつならば、

$$D > 0, \alpha\beta > 0, \alpha + \beta > 0$$

扱う 38% , 一部で扱う 27% , 扱わない 35%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	6	55	33	6				

④ 組立除法

扱う 68% , 一部で扱う 12% , 扱わない 20%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	5	73	13	3			3	3

ク：その他「1次式 $(x-k)$ で割る問題は、整式の除法よりも組立除法の方が有用なため」

⑤ 2直線の交点を通る直線の方程式

2直線 $x-y-1=0, x+2y-4=0$ の交点 A を通る直線の方程式は、定数 k を用いて、 $(x-y-1)+k(x+2y-4)=0$ と表せる。

扱う 41% , 一部で扱う 25% , 扱わない 34%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	6	49	24	12	6		3	

⑥ 2つの円の交点を通る図形

2円 $x^2+y^2-5=0, x^2+y^2-6x-2y+5=0$ の交点を A, B とすると、A, B を通る図形の方程式は、定数 k を用いて、次のように表せる。

$$k(x^2+y^2-5) + (x^2+y^2-6x-2y+5) = 0$$

扱う 35% , 一部で扱う 27% , 扱わない 38%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	7	53	27	3	7		3	

⑦ 放物線を境界線とする領域

不等式 $y \geq x^2 - 4x + 3$ の表す領域を図示せよ。

扱う 36% , 一部で扱う 22% , 扱わない 42%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	10	67	17		3		3	

⑧ 加法定理の点の回転

加法定理を用いて、点(2, 4) を、原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点の座標を求める。

扱う 23% , 一部で扱う 8% , 扱わない 69%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	19	37	25		6	13		

⑨ 和と積の公式

$$\sin 3\theta \cos \theta = \frac{1}{2} \{ \sin(3\theta + \theta) + \sin(3\theta - \theta) \}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

扱う 16% , 一部で扱う 16% , 扱わない 68%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	25	25	31	6		13		

⑩ 負の数の n 乗根

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

扱う 54% , 一部で扱う 16% , 扱わない 30%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	14	69	14	3				

- ⑪ 関数 x^n の導関数 $(x^n)' = nx^{n-1}$
 扱う 76% , 一部で扱う 12% , 扱わない 12%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	11	76	9			2	2	

- ⑫ 4次関数のグラフ
 扱う 32% , 一部で扱う 20% , 扱わない 48%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	23	46	31					

- ⑬ 放物線と x 軸で囲まれた部分の面積
 $a > 0$ のとき、放物線 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は、 $\frac{a(\beta - \alpha)^2}{6}$

扱う 46% , 一部で扱う 30% , 扱わない 24%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	8	52	29	3	3		5	

- ⑭ 曲線と接線で囲まれた部分の面積
 扱う 45% , 一部で扱う 22% , 扱わない 33%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	6	52	30	3	6		3	

- ⑮ 3次関数のグラフと面積
 曲線 $y = x(x - 1)(x - 2)$ と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。
 扱う 40% , 一部で扱う 25% , 扱わない 35%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	6	53	32	3	3		3	

数学I, Aと同様に、「扱う」または、「一部のクラスで扱う」と答えた学校の半数が「イ：通常の内容として扱う」と回答している。

ただし、⑧⑨は、扱わないと答えた学校が多く、理由も「ウ：既習事項を発展させて応用力をつけるため」の割合が高い。

(2) 数学Bのアンケート結果

数学Bのアンケート結果は以下の通りである。

- ① 同じ平面上にある点

一直線上にない3点 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ と、点 $P(\vec{p})$ について、点 P が平面 ABC 上にあるならば、
 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, s + t + u = 1$ となるような実数 s, t, u が存在する。

扱う 54% , 一部で扱う 23% , 扱わない 23%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	21	46	21	12				

- ② 平面の方程式

点 $(3, 1, -1)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (-2, 1, 4)$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

扱う 27% , 一部で扱う 16% , 扱わない 57%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	26	26	43	5				

- ③ 複利計算

扱う 27% , 一部で扱う 9% , 扱わない 64%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	44	25	19	6			6	

- ④ $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列の階差数列

扱う 50% , 一部で扱う 16% , 扱わない 34%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	14	59	24				3	

- ⑤ 隣接3項間の漸化式

$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

扱う 34% , 一部で扱う 32% , 扱わない 34%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	10	41	49					

- ⑥ 二項分布のグラフ

扱う 7% , 一部で扱う 9% , 扱わない 84%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	29	29	29					13

ク：その他「数列が苦手な文系生徒のためのセンター対策で扱う」

- ⑦ 連続型確率変数の期待値と標準偏差

扱う 5% , 一部で扱う 9% , 扱わない 86%

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
%	17	33	33					17

ク：その他「数列が苦手な文系生徒のためのセンター対策で扱う」

数学Bは、「扱う」かどうか、内容によって大きく別れた。①④は扱っている学校が多い。

⑥⑦は、ほとんどの学校が扱わないと答えているが、昨年度までの研究部のアンケート結果から、数

学Bの「確率分布と統計的な推測」の領域自体を扱わない学校が多いと予測される。この領域は扱ったとしても発展的な内容には触れない学校が多いのであろう。

《参考》昨年調査では、「確率分布と統計的な推測」の領域を扱っていると回答した学校は2校であった（一昨年度は4校）。今年度は⑥が7校、⑦が6校で、「扱う」「一部のクラスで扱う」と回答されている。

4 課題学習について

各校で実施されている課題学習について、生徒の反応が良かった題材や、面白い題材を、各校から紹介していただいた。

〔課題学習実施例〕

- ・ ハノイの塔
- ・ 複利計算
- ・ 身の回りにある数学
- ・ 砂や塩を使って、三角形の外心・内心を考える。
- ・ 3人に赤白の帽子を被せ、自分以外の人の帽子の色から、自分の帽子の色を推理する。
- ・ クラス内に、同じ誕生日の生徒がいる確率
- ・ 三角比を利用して急な坂道を楽にのぼる方法
- ・ 20歳の誕生日の曜日の計算
- ・ クラスの中でプレゼント交換をして、全員が自分以外のプレゼントをもらう確率
- ・ 等式 $a^2 + b^2 + c^2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) を見つける。
- ・ 工業高校の特性を活かし、物作りと関連した授業
- ・ 黄金比尺の製作、身近にある黄金比
- ・ 2進数を利用した1～31の数当てクイズ
- ・ 2次関数のグラフ上の点の問題（英語）
- ・ モンティ・ホール問題（コップ、おはじき使用）
- ・ 画鋸と硬貨を何度も投げて、表の出る確率を観察
- ・ x, y の2次方程式の整数解
- ・ 三角比を使って、校舎の高さを測る
- ・ 階段の傾斜と法律
- ・ ナンバープレートの総数
- ・ クラスの平日の睡眠時間など、身近なものを調査し、各班がそれぞれのデータの分析方法を用いて、データから読み取れることを発表する。

等々

授業時数が限られる中、各校が工夫を凝らして課題学習に取り組み、生徒の意欲や数学への関心を高めたり、問題解決能力をつけさせるために努力されていることが、アンケートの回答から分かった。

課題学習の実施例に関しては、本研究委員会の中の「課題学習研究委員」の研究報告もぜひご参照いただきたい。

5 終わりに

数学I・A・II・Bともに、教科書にも書いてある通り、「研究」や「発展」は省略しても良い内容であり、教科書のレベルや、生徒の習熟度や進路希望によっては、「研究」や「発展」の内容は扱いにくい物も含まれている。また、限られた授業時数の中では、発展的な内容を扱うよりも、基礎基本の徹底に重きを置く必要がある学校も多い。

しかし、今回のアンケート結果をまとめる中で、各学校における、生徒の数学への興味関心を高めるための工夫に触れることができた。

生徒の理解度に応じて、発展的な内容を扱うことで、生徒の理解が深まるのか、逆に、既習事項と混同してしまうのか。その都度バランスを見極めて、工夫されている様である。

発展的な内容を学習することは、応用力が身に付くだけでなく、数学に興味関心を持って主体的に取り組もうとする姿勢を育てることや、基礎基本の定着にも繋げていける。特に、アクティブラーニングを取り入れる重要性が語られる今、発展的な内容を扱うことで、多様な考え方に触れさせたり、自己の解答を自分なりに解説させたりする機会を増やすことは、有用であると考えます。

今回の研究を終えて、今後は発展的な内容をより積極的に扱っていきたいと感じている。また、その際には、学校で使っている教科書とは違う教科書も参考にすることで、より幅広い題材に触れられるかもしれない。

最後になりましたが、お忙しい中、今回のアンケート調査に対し、丁寧にご回答、ご意見いただきまして本当にありがとうございました。本研究委員会は今後も研究を重ねていく所存ですので、各先生方から幅広いご意見をお寄せいただけたら幸いです。