中四国の国立大学の入試問題について
—数学Ｉにおける確率から—

浦田 雄一
愛媛県立松山東高等学校

平成 18 年 2 月 10 日

1　はじめに

平成 15 年度から新教育課程となっている。それにともなって、以前の数学Ｉにおける確率は数学Ａへと移行している。しかし、大学入試センター試験や二次試験について考えてみると、従来の数学Ｉの確率に関して大きな変化はないと見てよい。

本校生徒はほとんどが大学進学を希望している。今回は「平成 17 年度入試の中四国の国立大学の二次試験」から確率の問題を解かせ、それについて調べてみることにした。

2　確率に関する問題の出題状況

過去３年間に出題された平成 15,16,17 年度の出題状況を表にまとめてみた。中四国のすべての国立大学が確率の問題を出題しているわけではない。過去３年間を調べてみると、場合の数や期待値の問題も含めて 10 大学中８大学が出題をしている（ここでいう大学とは統合により以前の医科大学を医学部の欄に記載している）。ただ、文系あるいは理系のみの学部（学科）だったり、数学Ⅱ、数学Ｂや数学Ⅲとの融合問題がある。また、選択問題として出題しているところもある。

難易度としては、全体的に見て高くはないと思われるが、場合分けが複雑であったり、工夫した計算など計算力を必要とする問題がある。問題文の意味をしっかりと理解しなければならない問題もある。

出題傾向を見てみると、大学によって大きな隔たりがある。毎年必ず出題するところもあれば隔年であったり、中には過去３年間出題していないところもある。（参考文献：聖文社　数学入試問題詳解　Ｉ, Ⅱ, Ⅲ）

平成 17 年度入試問題の中から３題を紹介し、その中の２題について分析を行った。

3　入試問題例

3.1　鳥取大学　前期（工・農・医）

問題

くじ引きに関する次の問に答えよ.

表 1: 平成 15,16,17 年度の中四国の国立大学入試状況（数学Ⅰ・確率関係から）

大学	年度	文系		理系		数学科		医/歯/薬		備考
		前期	後期	前期	後期	前期	後期	前期	後期	
鳥取	15			○				○		○：期
	16									
	17			○			□	○		□は数Bとの融合
島根	15			○		○		△		△：場
	16			○		○		△		△：場
	17			○	△		△			○：期、△は数Bとの融合
岡山	15									
	16	○								○：場、数Bとの融合
	17	○								○：場
広島	15	△		○	□	◎	☆	○		○は数Ⅱとの融合、すべて：期
	16	△		○	□		☆	○		○は数Bとの融合、△：場、期、
	17	△		○	□		☆	○		□、☆：期、数Ⅲとの融合、○は
山口	15					○		○		
	16	○		○						
	17	○		○			△			○、△とも場合の数との融合
徳島	15			○						
	16									
	17			○						場合の数
鳴門教育	15					○				中学校教育専修
	16					○				中学校教育専修
	17									
香川	15									
	16									
	17									
愛媛	15			○		○		○		
	16									
	17					○				集合の内容を含む
高知	15									
	16									
	17									

○：場 … ○が場合の数の内容を含むことを表す。

△：期 … △が期待値の内容を含むことを表す。

（1）「当たり」くじが 2 枚,「はずれ」くじが 10 枚入った箱がある．この箱から 5 回くじを引くとき，3 回は「当たり」で 2 回は「はずれ」となる確率を求めよ．ただし，引いたくじは毎回もとに戻すことにする．

（2）（1）と同じ箱から 5 回くじを引くとき，3 回以上「当たり」くじを引く確率を求めよ．ただし，引いたくじは毎回もとに戻すことにする．

（3）「当たり」くじと「はずれ」くじが 1 枚ずつ入った箱がある．その箱から 1 枚くじを引き，「はずれ」くじの場合にはそれを箱に戻し，さらに箱の中に「はずれ」くじを 1 枚追加する．この操作を,「当たり」くじを引くまで続ける．このとき n 回目に初めて「当たり」くじを引く確率を n を用いて求めよ．

解答

（1）5 回中「当たり」が 3 回,「はずれ」が 2 回より

$$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{3888} $$

（2）(i) 5 回中，4 回「当たり」となる確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{7776} $$

(ii) 5 回中，すべて「当たりとなる確率は

$$ \frac{1}{6^5}=\frac{1}{7776} $$

よって，(1) の結果とあわせると，3 回以上「当たりを引く確率は

$$ \frac{125}{3888}+\frac{25}{7776}+\frac{1}{7776}=\frac{23}{648} $$

（3）$(n-1)$ 回まで「はずれ」で，n 回目に「当たり」を引く確率を求めればよい.「はずれ」を引くごとに，くじに含まれる「はずれの数が 1 だけ増えることに注意して，

$$ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)} $$

3.2 岡山大学　前期（経済、教育）

問題

次の問いに答えよ。

（1）英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊を取り出すとき、英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率 $\frac{7}{40}$ となる。日本語の本は何冊あるか答えよ。

（2）各組が 12 枚ずつからなる赤、青、黄色の 3 組のカードがあり、各組ごとに 1 から 12 まで異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき、数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。

解答

（1）英語の本を x 冊とすると、日本語の本は $(10-x)$ 冊であるから、条件より

$$\begin{aligned}
\frac{{}_x\mathrm{C}_2 \cdot {}_{10-x}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5} &= \frac{7}{40} \\
\frac{x(x-1)}{2}\cdot(10-x) &= \frac{7}{40}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} \\
(x-1)x(10-x) &= 42 \\
x(x-1)(10-x) &= 2\cdot 3\cdot 7
\end{aligned}$$

$2 \leq x \leq 9$ であるから,

$$x = 3$$

したがって、日本語の本は 7 冊である。

（2）赤、青、黄色のカードの数をそれぞれ x, y, z とする。

$$\begin{gathered}
x + y + z = 15 \\
x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1
\end{gathered}$$

を満たす自然数 (x, y, z) は、1 を 15 個並べて、1 と 1 の間の 14ヵ所から 2ヵ所を選べば、左側が x、真ん中が y、右側が z に 1 対 1 に対応するので、求める場合の数は

$${}_{14}\mathrm{C}_2 = \frac{14\cdot 13}{2\cdot 1} = 91$$

であるから、このうち $(x, y, z) = (1, 1, 13), (1, 13, 1), (13, 1, 1)$ の 3 通りが条件を満たさない。

よって、求める場合の数は

$$91 - 3 = 88 \text{（通り）}$$

3.3　広島大学　前期（経済、教育）

問題

1 枚のコインを 1 回投げて、三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を、

表が出たとき、左回りで隣の頂点に移し、
裏が出たとき、右回りで隣の頂点に移す。

という試行を考える。始めに駒を頂点 A に置く。

次の問いに答えよ。

（1）この試行を 2 回繰り返したとき、駒が頂点 A にある確率 P_2 を求めよ。

（2）この試行を 3 回繰り返したとき、駒が頂点 A にある確率 P_3 を求めよ。

（3）この試行を 4 回繰り返したときに、駒が頂点 A に初めて戻ってくる確率 Q_4 を求めよ。

（4）この試行を n 回 $(n \geq 2)$ 繰り返したときに、駒が頂点 A に初めて戻ってくる確率 Q_n を求めよ。

解答

1 枚のコインを 1 回投げるという試行を行ったとき、表の出る確率、裏の出る確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

（1）試行を 2 回繰り返したとき、例えば、1 回目に表、2 回目に裏が出ることを (○, ×）と表すこととすると、駒が頂点 A にあるのは,

$$(\bigcirc, \times) \text{ または } (\times, \bigcirc)$$

の場合であるから

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

（2）試行を 3 回繰り返したとき、駒が頂点 A にあるのは、3 回とも表または 3 回とも裏となる場合であるから

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

（3）試行を 4 回繰り返したとき、駒が頂点 A に初めて戻ってくるのは、(1) と同様の表し方をすると、

$$(\bigcirc, \bigcirc, \times, \times) \text{ または } (\times, \times, \bigcirc, \bigcirc)$$

の場合であるから、

$$Q_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

(4)$n = 2$ のとき

$$Q_2 = P_2 = \frac{1}{2}$$

$n \geq 3$ のとき、試行を n 回繰り返して、駒が頂点 A に初めて戻ってくるのは、1 回目に駒が B または C に行き、2 回目から $(n-1)$ 回目までは BC 上を行き来し、最後の n 回目に A に戻る場合であるから

$$Q_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

これは $n = 2$ のときも成り立つ。よって

$$Q_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

4　入試問題の分析および考察

4.1　問題 I

対象生徒：1 年生　80 名、設定時間 35 分

主な誤答例

(1)

- $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{7776}$ として 1 通りのみの確率を求めた。(16 名)
- 立式は合っているが、計算ミスをしている。(7 名)
- 分母を ${}_{12}C_5$ としている。(5 名)

表 2: 正誤人数

	(1)	(2)	(3)
正答	35	25	20
誤答	45	51	49
無答	0	4	11

- 当たる確率を $\frac{1}{2}$、はずれる確率を $\frac{1}{10}$ としている。(3 名）
- ${}_{12}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$ としている。(2 名)
- ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times_5 \mathrm{C}_2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ としている。(2 名)

(2)

- (1) で ${}_5\mathrm{C}_3$ をかけるなどの考え方を考え方を間違えたため。(27 名)
- 場合分けや立式は正しくできているが、計算ミスをしている。(10 名)
- 余事象の確率を求めようとしたが、当たりが 1 本も出ない確率を求めていない。(3 名)

(3)

- n 回目に当たる確率 $\frac{1}{n+1}$ を答としている。(27 名)
- 1 回目、2 回目、$\cdots$ と具体的に求めているが、途中で終わっている。(5 名)
- 立式が ${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)^1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$ となっている。(4 名)
- 立式が $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\cdots\frac{1}{n+1}$ となっている。(3 名)
- 立式が ${}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^1$ となっている。(1 名)
- $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ と答えている。(1 名)

考察

(1) は反復試行の基本的な問題である。しかし、入試問題を意識したか予想以上に誤答が多かった。また、6^5 の計算ミスも多かった。${}_5\mathrm{C}_3$ の掛け忘れのミスが誤答の全体の 36%であった。

(2) の正答者の内訳を見ると、余事象の確率求めて 1 から引いた生徒はたった 1 名しかいなかった。また、誤答となった生徒の中で余事象の確率を求めて 1 から引いた生徒は 17(33%) もいた。(1) を利用するという、入試問題の特徴を指導しなければならない。

(3) の正答者の内訳を見ると、解答例のように解けていた者が 14 名、規則性を読みとって答を導いたものが 6 名であった。本来なら推測であれば、数学的帰納法で証明しなければならないが、今回は未習ということもあり正答とした。

4.2　問題II

対象生徒：1 年生　81 名、設定時間 35 分

表 3: 正誤人数

	(1)	(2)
正答	40	35
誤答	41	41
無答	0	5

主な誤答例

(1)

- 方程式を立てるまでは合っているが、n の 3 次式を展開して 3 次方程式となり行き詰まってしまった。(25 名)
- ${}_{10-n}\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_1 = 21$ で止まってしまった。(4 名)
- 方程式を ${}_{10}\mathrm{C}_3 \left(\frac{n}{10}\right)^2 \left(\frac{10-n}{10}\right)^1 = \frac{7}{40}$ としている。(4 名)
- 方程式を $\frac{{}_n\mathrm{C}_1 + {}_{10-n}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{7}{40}$（$+$ と $\times$ の間違い) としている。(2 名)
- 方程式を ${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{n}{10}\right)^1 \left(\frac{10-n}{10}\right)^2 = \frac{7}{40}$ としている。(2 名)
- 方程式を $\left(\frac{n}{10}\right)^2 \left(\frac{10-n}{10}\right)^1 = \frac{7}{40}$　としている。(1 名)

(2)

- 場合分けで解いたが、見落とし（不足）があった。(16 名)
- $(2,2,11),(3,3,9),(4,4,7),(5,5,5),(3,3,6),(1,1,7)$ も $6!$ 通りあると考えた。(9 名)
- $(1,1,13)$ の場合も含んでいる。(8 名)
- 場合分けで解こうとしたが、途中で終わっている。(4 名)
- 同じ数字を使わない場合分けが 12 通りあり、それを答えとしている。(2 名)
- 同じ数字を使う場合分けも入れて 18 通りあり、それを答えとしている。(2 名)

考察

(1) の正答者の中には日本語の本の数が、1 冊、2 冊、$\cdots\cdots$ と具体的に代入していって題意に適するものを見つけて答えていた者が 8 名いた。${}_{10-n}\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_1 = 21$ で止まっている状況から ${}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ として計算できるが、${}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10!}{3!7!}$ としての計算が身に付いていないと予想される。${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ は重要な公式である。特に、確率や期待値の最大値問題によく利用される。

(2) の正答者の中で、場合分けにより求めたものが 31 名 (89%) であった。理想ではあるが工夫して式を立てることが望ましい。計算も楽になりスピードも速い式を習得したいものである。

5　おわりに

「確率」という分野は代数、幾何、代数幾何、解析と比べると異質なところが多い。言い換えればそれだけ”考え方”が重要視されるともいえる。４つのポイント

1. 問題文章の読解力
2. 計算力および基本的な考え方の習得
3. 順列と組合せの使い分け
4. 工夫して考え、過不足なく場合分けをする能力

を基本的な問題から演習を重ねて力をつけなければならない。

新教育課程になり「条件付き確率」が数学Ｂから数学Ｃへと移行した。京都大学の文系学科の入試出題範囲に数学Ｃが含まれているのに興味がある。「条件付き確率」の出題のためではないだろうか。

今回の研究を生かし、今後の指導に役立てていきたいと思う。

＊参考文献：17 年度全国大学入試問題詳解Ｉ, II, III（聖文社）