平成17年度愛媛大学入試問題(数学)の研究

石丸　直司
愛媛県立松山北高等学校

2006年2月6日

1　はじめに

5月21日(土)に松山南高校において、愛媛大学の平田教授より平成１７年度愛媛大学前期日程数学入試問題（理学部数理学科用問題を含む）についての説明があった。

2　出題傾向の考察

2.1　出題形式

昨年に引き続き、各学科とも次の範囲より全問記述４題を解答させるようになっている。

- 教育・農学部 $\cdots\cdot$ 数学Ｉ・II・Ａ・Ｂ
- 理・工・医学部 $\cdots$ 数学Ｉ・II・III・Ａ・Ｂ
- 理（数理科学）学部 $\cdot\cdot$ 数学Ｉ・II・III・Ａ・Ｂ・Ｃ

「数学Ａ・Ｂ・Ｃ」の出題範囲は、次のようになっている。

- 「数学Ａ」$\cdots\cdots\cdot$ 数と式，数列
- 「数学Ｂ」$\cdots\cdots\cdot$ ベクトル, 複素数と複素数平面
- 「数学Ｃ」$\cdots\cdots\cdot$ 行列，いろいろな曲線

また、各学部に共通の [5]（数学Ａ），[6]（数学Ｂ）の２題が、ａとｂに分かれ、いずれか一方の選択問題である。

2.2　出題内容

- 「数学II」 図形と方程式, 積分法 (面積)
- 「数学III」 微分・積分 (接線), 微分・積分, 極限 (三角関数とその極限)
- 「数学Ａ」 命題と論証, いろいろな数列 (漸化式)
- 「数学Ｂ」 空間ベクトル (空間ベクトル，内積), 複素数

2.3 難易度

例年どおり、おおむね標準的・基本的なレベルであり、複合問題もなく素直な問題が多い。

3 平成17年度入試問題の分析

3.1 生徒に入試問題を解かせてみて

11月下旬に理系３年生(107名)に平成17年度愛媛大学入試問題の[１]〜[６]の４題を100分間で解かせ、本校での定期考査程度の解答、採点を行った。なお、選択問題はAの２問とBのベクトルのあわせて３問より、２問を選択させた。説明会では、各学部によって評価が異なり、したがって採点基準も異なるので、平均点も多少差がある。たとえば、次のような評価であるらしい。

- 理学部 … 理論的な力が付いているか
- 工学部 … 複雑な式でも、がむしゃらに解けるか
- 教育学部 ‥ ひとに分かりやすい答案がかけるか

3.2 問題分析

$\boxed{1}$

平面上に4点A(2,4),B(4,2),C(2,0),D(0,2)と点C,Dを通る直線lがある。

（１）点A,Bから等距離にある点の軌跡の方程式を求めよ。

（２）中心が一致する２つの円P,Qがある。円Pは点A,Bを通り,円Qは直線lに接している。Pの面積がQの面積の10倍であるとき,Qの中心の座標と半径を求めよ。

表 1: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0〜4	5〜9	10〜14	15〜19	20〜24	25
理系	12.8	理系	5	14	9	11	9	1

得点率　51.2% (25点満点) 受験者　49名

$\boxed{\text{考察}}$

（１）について

ほとんどの生徒が垂直２等分線として求め、よくできていた。

（２）について

条件を式にすることはできているが、円の中心が直線$y=x$上にあることに気づかず、円の方程式を$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$とおき、作業が増え最後まで計算できていない生徒が多い。図は描けているが活用できていない。

$\boxed{2}$

曲線$C: y=x^2$上の２点A,Bのx座標をそれぞれa,bとし,$a<b$とする。

（１）点A,Bを通る直線lの方程式を求めよ。

（２）Cとlで囲まれる部分の面積Sを求めよ。

表 2: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0〜4	5〜9	10〜14	15〜19	20〜24	25
理系	12.9	理系	8	10	7	17	3	4

得点率　51.5%(25 点満点)　受験者　49 名

（3）$S=36$ のとき, 線分 A, B の長さを最小にする a,b を求めよ。

考察

（1）（2）について

よくできているが、式を整理しきれない生徒が多い。

（3）について

（2）で $\frac{(b-a)^3}{6}$ と整理できていない生徒は先に進めていない。また、$\mathrm{AB}^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)^2$ の左辺をうまく整理できず、数字が大きくなり最後まで計算できていない生徒が多い。

3

曲線 $C: y=x^3-x$ 上の点を $\mathrm{P}(t,t^3-t)$ とする。

（1）P における C の接線の方程式を求めよ。

（2）P における接線が点 $(0,2)$ を通るとき, t を求めよ。

（3）点 $\mathrm{Q}(a,b)$ を通る C の接線が 2 本あり, かつ Q で直交するとき, 点 Q の座標を求めよ。ただし,$a>0, b\neq a^3-a$ とする。

表 3: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0〜4	5〜9	10〜14	15〜19	20〜24	25
理系	10.7	理系	5	30	12	7	2	2

得点率 42.8 % (25 点満点)　受験者 58 名

考察

（1）（2）について

基本的な問題で、よくできている。

（3）について

問題を読み切れておらず、接点を 2 点設定しその接線が垂直に交わるとして解こうとした生徒が多かった。

$\mathrm{Q}(a,b)$ を通る（1）で求めた接線が 2 本あるときとはどういうことかを、理解できていない。

4

$0<a<\frac{1}{4}$ とする。

（1）x の方程式 $\cos x=\cos(ax)$ の $2\pi\leq x\leq 4\pi$ における解を求めよ。ただし, 必要なら

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を用いてよい。

（2）$2\pi\leq x\leq 4\pi$ において, 2 つの不等式

$$y\geq\cos x, y\leq\cos(ax)$$

を同時に満たす xy 平面の領域を D_a とする。D_a の面積 $S(a)$ を求めよ。
（３） $\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ。

表 4: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0〜4	5〜9	10〜14	15〜19	20〜24	25
理系	8.2	理系	28	7	10	8	2	3

得点率 32.6 % (25 点満点) 受験者 58 名

考察

（１）についておよそ半数の生徒は変形しただけで先へ進めていない。生徒には、角度の範囲の置き換えは比較的分かりにくいところであり、さらに文字を含んでいるのでいっそう分かりにくかったようである。

$\pi < (1+a)\pi < \dfrac{(1+a)x}{2} < 2(1+a)\pi < 3\pi$ より $\dfrac{(1+a)x}{2} = 2\pi$ としているものが多い。

（２）（３）について

（１）ができている生徒は比較的よくできているが、上端, 下端を α や β で置き換えないで行い、複雑になり間違ったり、（３）では正確に変形できていなかったりしている者もいた。

5 − a

x, y を実数とする。条件「$|x| + |y| \leq 1$」を P, 条件「$x^2 + y^2 \leq 1$」を Q, 条件「$x^3; y^3 \leq 1$」を R とする。

次の命題の真偽を述べよ。また, その命題が真の場合は証明し, 偽の場合は反例をあげよ。

（１） 命題「$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$」
（２） 命題「$\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$」
（３） 命題「$\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{R}$」
（４） 命題「$\mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{Q}$」

表 5: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0〜4	5〜9	10〜14	15〜19	20〜24	25
理系	10.1	理系	6	7	4	2	1	2

得点率　40.4 %　(25 点　満点)　(受験者　22 名)

考察

- (１)〜(４) とも、真偽については判定でき、偽のときの反例もあげることができた。
- (１) の証明では図示している生徒は以外に少なく、P の両辺を２乗して処理しているものが多かった。
- (３) の証明はあまりできていない。

5 − b

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+2} \cdot a_n = 2\left(a_{n+1}\right)^2 (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。

（1）$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく。$\{b_n\}$ は等比数列であることを示し, 一般項 b_n を求めよ。

（2）一般項 a_n を求めよ。

（3）$a_n > 10^{10}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

表 6: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0～4	5～9	10～14	15～19	20～24	25
理系	6.4	理系	47	31	0	4	1	7

得点率 25.6 % (25 点満点)　(受験者　90 名)

考察

（1）について

b_n はよくできているが、与式を変形できず、$b_{n+1} = 2b_n$ とおけず、等比数列であることを示せていないものが多かった。

（2）について

$a_{n+1} = 2^n a_n$ から、公比 2^n の等比数列としているものが非常に多かった。また、階差数列として求めているものもあった。

（3）について

（2）までできている生徒はほとんどできている。

6 − a

空間の 4 点 O, A, B, C に対し $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はどの 2 つも互いに垂直で, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \vec{a} + 2\vec{c}, \overrightarrow{\mathrm{OL}} = 2\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{b} - \vec{a}$ となる点を K, L, M とする。

（1）ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{KL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ をベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

（2）$\theta = \angle \mathrm{LKM}$ のとき, $\cos\theta$ を求めよ。

（3）直線 KM 上の点を N とする。直線 LN と直線 KM が垂直になるとき, 線分 KN の長さを求めよ。

表 7: 平均点と度数分布

	平均点	得点	0～4	5～9	10～14	15～19	20～24	25
理系	18.8	理系	2	14	11	16	18	41

得点率 75.2 % (25 点満点) (受験者 102 名)

考察

（1）（2）について

基本的な問題でありよくできていた。

（3）について

（2）の $\cos\theta$ を利用している生徒は 5 人と、少なかった。

ここでは、$\triangle$KLN や $\triangle$KLM について考えればよいのであるが、ベクトルの始点を O に取り最初から考えて、複雑になり正確に計算できなかった生徒が多い。（1）（2）の流れから図を描けていない生徒が多い。

$\boxed{6}-\boxed{\mathrm{b}}$
複素数 $z=x+yi(x,y$ は実数) について, 次の問に答えよ。ただし,i は虚数単位である。
（1）$z^2=1+2\sqrt{2}i$ を満たす x,y を求めよ。
（2）a を正の実数とする。

$$\begin{cases} z^2=1+ai \\ x<-2 \end{cases}$$

を満たす z が存在するための a の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{考察}}$
（1）について
基本的な問題であり, 素直に２乗し, 実部・虚部の係数比較をすればよい。
（2）について
「z が存在する」ということが「実数 x,y が存在する」ということに気づけば方針が立つが、

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=a \\ x<-2 \end{cases}$$

の、実数解が存在する a の範囲を求めることを、２次方程式への置き換えができれば比較的容易である。

4　おわりに

今年度も基本的あるいは標準的な良問が多い。今年度の特徴として、基本的な定番の問題ではあるが、あることに気がつけば意外と簡単に処理できるが、気づかなければ複雑になり大変というような、そういう力を問うような問題が目立った。今後の、動向に注目したい。また、来年度からは新課程入試となり、特に数学Ⅰ・A の出題が平面図形がらみでどのような出題になるかに注目したい。

この研究により感じたことは、とにかく基本的な内容の確認と徹底、標準的な良問を繰り返し解くことが大切である、ということだ。生徒は、11 月下旬に解いたとはいえ、まだまだ２次試験に対する力は備わっていない。誤答分析からも、基本的な事柄がまだ消化しきれていない生徒も多く見られる。それに加え、計算力・図示やグラフ化して考える力・問題内での関連性を見抜く力の不足など、これから少しずつ力を伸ばしていくと思うが、基本的なことから一つ一つ正確にものにしていって欲しい。

今後は、各大学入試問題をよく研究して、問題の傾向を早くつかみ、受験先に応じて効果的かつ合理的に各生徒の能力を最大限に引き出せるような指導ができるよう努力していきたい。