いろいろな変換を表す行列

五味　稔
愛媛県立三島高等学校

平成 18 年 2 月 6 日

1　はじめに

平成 15 年度より始まった教育課程により、数学の教科書の内容が一新され各分野で様々な学習内容の変更があった。なかでも数学Cにおける単元「行列」は、旧数学B「複素数平面」に変わり、移動や変換を学習する大切な単元となり復活した．従前の数学 C は、目標の冒頭に「応用数理の観点から、コンピュータを活用して $\cdots$ 」と示され、コンピュータを活用することを前提とした内容に構成されており、単元「行列」が、進学校の多くで授業内容から姿を消した感があったが、今回の改訂では、学習の効果を高めるためにコンピュータは必要に応じて活用する、にとどまっている．

いよいよ、その新しい教育課程での大学入試が行われる時期になり、復活した単元「行列」について私なりにまとめたいと考えた．

2　学習指導要領からみた入試

学習指導要領の内容を見ると、「具体的な事象の考察を通して」「具体的な事象の考察に活用できるようにする」というフレーズが繰り返し登場し、様々な生徒に対して具体的な事象から興味．関心を持たせ、数学の有用性を理解させる狙いがある．

「行列」に関しては、連立 1 次方程式を解くことと、平面上の点の移動だけを扱い、直線は点の集合だからといって、直線の移動も扱えるということではない、と念を押している。前々回の教育課程でみられたような 1 次変換とは、かなりレベルが違うことがわかる．

では、実際の大学入試の問題として、どこまでの内容が多く出題されるかを考えると、一部の難関大がより発展的な内容を出題するであろうが、多くの大学が

- 逆行列の存在
- ハミルトン・ケーリーの定理
- 連立 1 次方程式の解
- 「点の移動」から考えられる変換
- 対称移動を連続して行う合成変換
- 固有ベクトルからの行列の n 乗計算

などの分野が重点的に出題されると考えられる。その中から特に、「いろいろな変換を表す行列」を以下にまとめた。

3　いろいろな変換を表す行列

過去に出題された大学入試問題から、特徴ある行列の例をあげてみる．

3.1　問題①

座標平面において、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ によって表される１次変換 f は、x 軸に関する対称移動である．直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動となる１次変換を g とする．

（1）g によって点 $(2, 0)$ はどこにうつるか．

（2）g を表す行列 B を求めなさい．

（3）f と g の合成変換を表す行列 C を求めなさい．

（4）C によって表される１次変換はどういう１次変換といえるか．

＜愛媛大学＞

解答

（1）$\mathrm{P}(2,0)$ が変換 g により $\mathrm{Q}(x', y')$ にうつるとする．

2 点の中点が直線上にあるので、

$$\frac{y'}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2 + x'}{2} \tag{1}$$

線分 PQ は直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ と直交するので、

$$\frac{y' - 0}{x' - 2} = -\sqrt{3} \tag{2}$$

これらを解いて、

$$(x', y') = \left(1, \sqrt{3}\right)$$

（2）$\mathrm{R}(0,2)$ が $\mathrm{S}(x', y')$ にうつるとするとき、（1）と同様にして、$\mathrm{S}(x', y') = \left(\sqrt{3}, -1\right)$ となる．すなわち、

$$B \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

（3）１次変換 $g \circ f$ を表す行列は BA であるから，

$$C = BA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

（4）原点を中心とした 60° の回転を表す．

解説

原点を通る直線に関する対称変換を考える．点 P の直線 $l: y=(\tan\theta)x$ に関する対称点を P′ とする．直線 l と 2 点 P, P′ からなる図形を、原点の回りに $-\theta$ だけ回転したときの P, P′ の位置を Q, Q′ , 直線 l は x 軸に重なる．

点 P を原点の回りに $-\theta$ だけ回転すると点 Q に移り、その点 Q を x 軸に関して対称移動した後、原点の回りに θ だけ回転すると点 P′ に重なるので、それを表す行列は

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上から、原点を通り x 軸の正の向きとなす角が θ である直線に関する対称移動を表す 1 次変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

である．

本問の場合、30° として

$$B=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

が求まる。

3.2 問題②

O を原点とする平面上の直線 $y=mx$ に対して点 P と対称な点を P′ とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ にうつす 1 次変換を f とする．

（1）変換 f を表す行列を求めなさい．

（2）変換 f によって変わらないベクトルおよび符号のみ変わるベクトルを求めなさい．

＜富山大学＞

$\boxed{\text{解答}}$

（1）$\mathrm{P}(x,y), \mathrm{P'}(x',y')$ とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ は直線 $y=mx$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ と平行であるから, $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}=2t\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$

すなわち、$\begin{cases} x'=x+2mt \\ y'=y-2t \end{cases}$ とおける。

また、線分 PP' の中点 $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)=(x+mt, y-t)$ は、直線 $y=mx$ 上より、$y-t=m(x+mt)$ が成り立ち、$t=\dfrac{-m}{1+m^2}x+\dfrac{1}{1+m^2}y$

$$x'=\frac{1-m^2}{1+m^2}x+\frac{2m}{1+m^2}y$$

$$y'=\frac{2m}{1+m^2}x+\frac{1-m^2}{1+m^2}y$$

よって求める行列は $\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & 1-m^2 \end{pmatrix}$ となる。

(2) ①において、$x=x', y=y'$ とおくと、$mx=y$

よって、f によって変わらないベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ (t は任意の実数)

次に、①で $x=-x', y=-y'$ とおくと、$-x=my$

よって、f によって符号のみ変わるベクトルは $t\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意の実数)

解説

$m=\tan\theta$ とおくと、$\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta, \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta$ から、先の問題①と同じ結果が得られる.

3.3 問題③

行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す xy 平面上の 1 次変換が、直線 $y=2x+1$ を直線 $y=-3x-1$ へうつすとする. 点 $\mathrm{P}(1,2)$ がうつる点を Q とし、原点を O とするとき、2 直線 OP と OQ のなす角の大きさを求めなさい.

＜東京大学＞

解答

直線 $y=2x+1$ 上の 2 点 $(0,1),(1,3)$ がうつる点は直線 $y=-3x-1$ 上より、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-3b \\ 3a+b \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{cases} a=-3(-b)-1 \\ 3a+b=-3(a-3b)-1 \end{cases}$$

これを解くと、$a=b=\dfrac{1}{2}$ となり、行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より、点 $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1, 2), \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ とすると、

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \sqrt{5}, \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{5}{2}$ であり、2 つのベクトルのなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5} \bullet \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

なす角は 45°

$\boxed{\text{解説}}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$ とみることができ、この行列は、原点の回りに 45° 回転移動し、原点からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍する変換であることを示す.

一般に、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

より、原点から点 $\mathrm{P}(a, b)$ に向かう半直線 OP が x 軸の正の向きとなる角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表され、回転と相似の合成変換を表すことが分かる.

同様に、行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ のタイプについて考えると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

と変形できるので、先の直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する対称移動を表す行列と同タイプと考えられる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称変換と相似変換との合成変換である.

3.4　問題④

行列 $\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-c & c \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって正方形は正方形にうつされることを示し、対応する正方形の面積が等しくなるように c を定めなさい。

＜名古屋工大＞

解答

原点 O から、点 $(c, c-1)$ に向かう半直線が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+(c-1)^2}}, \sin\theta = \frac{c-1}{\sqrt{c^2+(c-1)^2}}$$

$r = \sqrt{c^2+(c-1)^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-c & c \end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix} \frac{c}{r} & \frac{1-c}{r} \\ \frac{c-1}{r} & \frac{c}{r} \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、原点を中心とする角 θ の回転と、原点を中心とする相似比 r の相似変換の合成変換である．よって、正方形は正方形にうつり、面積は r^2 倍される。面積が等しくなるのは、$r^2 = 1$ すなわち、$c^2+(c-1)^2 = 1$ を解いて、$c = 0, 1$

3.5　問題⑤

2 つの円

$$x^2+y^2 = 1 \cdots ①$$
$$x^2+y^2 = 25 \cdots ②$$

がある.

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & -a \end{pmatrix}$ $(a > 0)$ で表される 1 次変換 f によって、円①が円②にうつされる.

(1) a の値を求めなさい.

(2) 円①の $x \geq 0, y \geq$ の部分にある弧は、f によってどのような図形にうつされるか答えなさい.

＜関東学院大＞

解答

（1）円①上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ が変換 f により、$(a\cos\theta+3\sin\theta, 3\cos\theta-a\sin\theta)$ にうつる．これが円②上にあるから、$(a\cos\theta+3\sin\theta)^2+(3\cos\theta-a\sin\theta)^2 = 25$ が成り立つ.

$$a^2\cos^2\theta+6a\sin\theta\cos\theta+9\cos^2\theta+9\cos^2\theta-6a\sin\theta\cos\theta+a^2\cos^2\theta = 25$$

$$a^2+9 = 25$$

$a > 0$ から $a = 4$

（2）円①上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ が変換 f により (x, y) にうつるとき、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos\theta + 3\sin\theta \\ 3\cos\theta - 4\sin\theta \end{pmatrix}$$

ここで、三角関数の合成を行うと、

$$\begin{aligned} x &= 4\cos\theta + 3\sin\theta \\ &= 5\left(\frac{4}{5}\cos\theta + \frac{3}{4}\sin\theta\right) \\ &= 5(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) \\ &= 5\cos(\alpha - \theta) \end{aligned}$$

ただし、α は $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}, \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ を満たす角
y 座標も同様に変形すると、

$$\begin{cases} x = 5\cos(\alpha - \theta) \\ y = 5\sin(\alpha - \theta) \end{cases}$$

となる.
θ が 0° から 90° まで動くとき、(x, y) は円②の周上を点 $(4, 3)$ から点 $(3, -4)$ まで動くことがわかる.

3.6 問題⑥

座標平面上の 1 次変換 f は、点 $(1, \sqrt{3})$ を点 $(-1, \sqrt{3})$ にうつし、合成変換 $f \circ f$ は、点 $(-1, \sqrt{3})$ を点 $(-2, 0)$ にうつすとする.
（1）f を表す行列 A を求めなさい.
（2）$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$ を求めなさい.

＜横浜市立大＞

解答

（1）$A\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, A^2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって、$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = AA\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

第 1 式とあわせると、$A\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

ここで、$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ より、右側からかけると

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

（2）（1）より $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$ なので,

$$A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

よって、

$$\begin{aligned} A+A^2+A+^3+A^4+A^5+A^6 &= A+A^2+A^3+A^3(A+A^2+A^3) \\ &= A+A^2+A^3-E(A+A^2+A^3) \\ &= O \end{aligned}$$

これを利用して、

$$\begin{aligned} &A+A^2+A^3+\cdots+A^{100} \\ &= (A+A^2+\cdots+A^6)(E+A^6+A^{12}+\cdots A^{90})+A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100} \\ &= A^{96}(A+A^2+A^3+A^4) \\ &= (A^3)^{32}(A+A^2-E-A) \\ &= (-E)^{32}(A^2-E) \\ &= A^2-E \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{解説}}$
回転の合成により、A^n が簡単になる角度に気付かせ、高次の行列の式を求めさせている.

4 1次変換のまとめ

以上のように出題された行列の成分スタイルにより、次にまとめる. ただし、$(a,b)\neq(0,0)$ とする.

4.1 スカラー変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

見て当たり前の行列であるが、原点を中心とする相似比 $|a|$ の相似変換である. 特に、$a=-1$ のときは、原点に関する点対称である.

4.2　対角変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} (a \neq b)$

基本ベクトル $(1,0),(0,1)$ がそれぞれ $(a,0),(0,b)$ にうつるから、x 軸方向に a 倍、y 軸方向に b 倍する．特に、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は x 軸に関する対称変換、$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は y 軸に関する対称変換である．

4.3　回転移動 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

言うまでもなく、原点の回りに角度 θ だけ回転させる変換.

また、回転の中心が原点でない場合を考える．点 $\mathrm{P}(x,y)$ を定点 $\mathrm{A}(a,b)$ の回りに角度 θ だけ回転させた点 $\mathrm{P}'(x',y')$ の座標は、平行移動により原点の回りの回転と考えればよいので、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

で与えられる．

4.4　直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する対称変換 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

4.5　合成変換

回転と、原点を中心とする相似比 $\sqrt{a^2+b^2}$ の相似変換との合成変換 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

直線 $y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称変換と原点を中心とする相似比 $\sqrt{a^2+b^2}$ の相似変換との合成変換 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

5　最後に

新課程入試元年の今年度は、平面幾何など各分野ともどのような内容まで出題されるのか非常に興味深い。数学Cにおいても、一部の国立大学文系学部で出題が予定されるなど、特に「行列」の取り扱いが文理ともに気になるところである。今回研究した内容は「行列」の中でもほんの一部分でしかないが、具体事例から生徒に「こんな変換をさせる行列とは？」などの発問をしながら興味を持って取り組んでいかせたいと思う。

参考文献

科学新興新社　モノグラフ　行列