国立大学入試問題の研究（数学B）

ベクトルの内積と外積

愛媛県立三島高等学校　　五　味　　　稔

1　はじめに

　数学Bにおける“平面上のベクトル”を授業で教える際に、いつも「これでいいのかな？」と思う部分がある．それは、ベクトルの演算として、内積を取り扱うときである．加法，減法，実数倍の学習後、積としてベクトル固有の内積を定義するのだが、内に対する外、すなわち“外積”というものを十分に説明しないまま、“内積”を終えてしまうことに、すっきりとしないのである．一つのセット、ペアになっているものの片方を忘れているような・・・・・・

「向き」と「大きさ」の2つを持った量を表すベクトルの演算であるから、当然普通の数の演算と違い、加減乗除の四則演算ができるわけではない．ベクトルとベクトルの積として、スカラーになるもの（内積），また再びベクトルになるもの（外積）について自分なりに整理し直し、大学入試の開題にふれてみたいと思う．

2　ベクトルの内積

　物体に力を加えると、物体は動く．物理では加えた力と同じ向きに物体が動いたとき、力の大きさと動いた距離の積、すなわち（力）×（距離）を力が物体になした「仕事」という．例えば坂道で物体を力 $\vec{F}$ で引っ張ったときに物体が変位 $\vec{s}$ だけ移動することを考える．力 $\vec{F}$ のなす仕事 W を考えるときに、演算

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$$

を定義する．図の中にある $\overrightarrow{F'}$ は力 $\vec{F}$ の $\vec{s}$ に平行な部分のベクトルで、正射影ベクトルと呼ばれるものである．このとき、斜面方向に力 $\overrightarrow{F'}$ で引っ張られ、物体への変位が $\vec{s}$ なので、積 $\vec{F}\cdot\vec{s}$ は $\overrightarrow{F'}\cdot\vec{s}$ と同量の仕事になり、

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\overrightarrow{F'}\cdot\vec{s}$$

となる．また、$\overrightarrow{F'}\,/\!/\,\vec{s}$ なので、（力）×（距離）は $\left|\overrightarrow{F'}\right|\times\left|\vec{s}\right|$ のことである．よって、

$\left|\overrightarrow{F'}\right|=\left|\vec{F}\right|\cos\theta$ となるので、

$$\vec{F}\cdot\vec{s}=\left|\vec{F}\right|\left|\vec{s}\right|\cos\theta$$

と定義される．もし、物体が力 $\vec{F}$ を加えたにもかかわらず、力が弱くて斜面を滑り落ちた場合は、変位 $\vec{s}$ が坂の下向きになった場合をさし、ベクトルのなす角が $90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$ となる．このとき、$\cos\theta<0$、すなわち $W=\vec{F}\cdot\vec{s}<0$ となり、角度を $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ としても仕事の理論に矛盾はない．

以上から、(内積)＝(スカラー積)であり、2つのベクトルの大きさと、なす角にのみ依存するので、その2つのベクトルの相対的な位置関係を保ったまま移動し、片方をx軸上に平行移動してきても内積の値は変わらない。具体例で言えば、$\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$，$\left|\overrightarrow{b}\right| = 3$，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が 60° のとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

であるが、これを x 軸上のベクトル $\overrightarrow{a} = (2,\ 0)$ と $\overrightarrow{b} = \left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ として、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 2 \times \frac{3}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

となるのである．これは、$\overrightarrow{a} = (a,\ 0)$，$\overrightarrow{b} = (b,\ d)$ のとき、$\overrightarrow{b}$ の $\overrightarrow{a}$ 方向への正射影ベクトルを $\overrightarrow{b'}$ とすると、$\overrightarrow{b'} = (b,\ 0)$ であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \cos\theta \\ &= \pm \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \\ &= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b'} \\ &= a \cdot b\end{aligned}$$

となり、内積が両ベクトルの x 成分の積で表される．

また、内積の計算として「$\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \sin\theta$ では、いけないの？」との質問も受けることがある．

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \cos\theta$$

で定義される内積計算では、もちろん

① 交換法則 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

② 分配法則 $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

③ 実数 k に対して $\left(k\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \left(k\overrightarrow{b}\right) = k\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)$

これらの基本法則が成り立つが、$\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \sin\theta$ については、

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

より、

$$\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \cos\theta\right)^2 + \left(\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \sin\theta\right)^2 = \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2$$

を利用して、

成分を $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると、

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 + \left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta\right)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において、$\sin\theta \geqq 0$ より、

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta = \left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right| \qquad \cdots\cdots ④$$

となり、上の①は成り立つが、②③が成り立たないことがわかり、いかに内積

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

が有効かがわかる.

ただ、④式が示すように、$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$ にも意味があり、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られた平行四辺形の面積を表す、行列式を表すことがわかる。

3　ベクトルの外積

“物体を回転させる力”について考える。シーソーを例にすると、Aに子供が座ると重力 $\vec{f}$ が働くので、シーソーには中心 O の周りに左回りに回転させる力が働く. そして、Bに大人が座ると重力 $\vec{F}$ を受け、右回りに回転させる力が働く. 両者の回転させる力が釣り合うのは、$\vec{R}$ と $\vec{f}$ が作る長方形の面積と、$\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る長方形の面積が等しい場合である.

$$\left|\vec{R}\right|\left|\vec{f}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|$$

位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ が直交しない場合も一般化することを考える. $\vec{r}$ の $\vec{F}$ に直交する成分を $\vec{r'}$ とすると、力の大きさは $\left|\vec{r'}\right|\left|\vec{F}\right|$ で与えられ、$\vec{r}$ と $\vec{F}$ とで張られる平行四辺形の面積に等しくなる.

力 $\vec{F}$ による回転の向きを考えると、それは位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ の相対的な向きによって決まる. 回転の中心は原点 O で、xy 平面上に $\vec{r}$ と $\vec{F}$ があるので、物体の回転軸は z 軸になる. すなわち、回転の軸は、$\vec{r}$ と $\vec{F}$ の両方に直交しており、$\vec{r}$ を 180° 以内で回転させて $\vec{F}$ の向きと同じにさせるとき、その回転を右ネジに当てはめ、進む方向がベクトルの向きとなる.

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は、その大きさが $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しく、その向きは $\vec{a}$ を $\vec{b}$ と同じ向きになるように回転したときにネジが進む方向であると定める. すなわち、この定義では、外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交することを含むとともに、外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ とでは、相対的な向きが逆になり、

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

となる. すなわち、交換法則が成り立たないのである.

次に、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分表示から、それらの外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の成分表示をもとめる.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

とすると、基本ベクトル $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ を用いて、

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_x}+a_2\overrightarrow{e_y}+a_3\overrightarrow{e_z},\ \vec{b}=b_1\overrightarrow{e_x}+b_2\overrightarrow{e_y}+b_3\overrightarrow{e_z}$$

と表される. ここで、外積 $\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_y}$ は、z 軸の正の方向で長さが 1 のベクトル $\overrightarrow{e_z}$ になる. 同様に考えると、

$$\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_y}=\overrightarrow{e_z},\ \overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_x}=-\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_z}=\overrightarrow{e_x},\ \overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{e_y}=-\overrightarrow{e_x}$$
$$\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{e_x}=\overrightarrow{e_y},\ \overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_z}=-\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_x}=\vec{0},\ \overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_y}=\vec{0},\ \overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{e_z}=\vec{0}$$

となる. この結果を用いると、

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(a_1\overrightarrow{e_x}+a_2\overrightarrow{e_y}+a_3\overrightarrow{e_z}\right)\times\left(=b_1\overrightarrow{e_x}+b_2\overrightarrow{e_y}+b_3\overrightarrow{e_z}\right)\\&=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\overrightarrow{e_x}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\overrightarrow{e_y}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

したがって、外積の成分表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

が得られる. この成分表示を用いると、

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0,\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$$

が簡単に確認でき、外積の大きさ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ が、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られた平行四辺形の面積に等しいことは、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で作られる三角形の面積 S が

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

で与えられることを用いると証明できる.

4　内積や外積に関する大学入試問題

最近の大学入試問題の中から、ベクトルの、特に内積や、外積がらみの問題を以下にあげてみる.

1辺の長さが1の正五角形OABCDに対して、

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく. BD の長さを x とするとき、次の問いに答えなさい.

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を x, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

（2） 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を x を用いて表せ.

（3） x の値を求めよ.

（4） $\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

（06　香川大）

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{DB}}$ であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = x\vec{a}$$

よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x\vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x-1)\vec{a} + \vec{b}$$

（2） $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = \left|x\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = x^2 + 2x\vec{a}\cdot\vec{b} + 1$ より、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2x}$$

（3） 引き続き、

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|(x-1)\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + 1$$

より、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1-x}{2}$$

（2）の結果とあわせて、

$$-\frac{1}{2x} = \frac{1-x}{2}$$

$x > 1$ より、$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

（4） $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle\mathrm{AOD}$

$$\begin{aligned} &= 1\cdot1\cdot\cos 108^\circ \\ &= \cos(180^\circ - 72^\circ) \\ &= -\cos 72^\circ \end{aligned}$$

したがって、$\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

＊（2）、（3）で、内積の連立式を立てさせる問題である.

座標空間に4点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(-1,\ 2a-2,\ 1)$，$\mathrm{D}(b^2-2b+2,\ 0,\ 0)$ がある．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが垂直になる実数 a の値を求めよ．

(2) (1)のとき、2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な大きさ1のベクトルを1つ求めよ．

(3) (1)のとき、四面体 ABCD の体積が最小となる実数 b の値を求めよ．また、そのときの体積を求めよ．

（05　京都産大・理系）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1\\2a-3\\2\end{pmatrix}$なので、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から、$a=1$。

(2) (1)から、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$となるので

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2-1\cdot(-1)\\1\cdot(-1)-1\cdot2\\1\cdot(-1)-1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$$

となるが、求めるベクトルは大きさが1なので、

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

となる。

(3) D と平面 ABC との距離を h とし、$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のなす角を θ とおくと、

$$\begin{aligned}h&=\mathrm{AD}|\cos\theta|\\&=|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\theta|\\&=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}|b^2-2b+3|\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(b-1)^2+2\}\end{aligned}$$

よって、$b=1$ のとき、最小値$\sqrt{2}$ をとり、このとき最小値となる体積値は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\sqrt{2}=1$$

＊(2)で求めた外積の大きさが $3\sqrt{2}$ となるが、

$$2\times\triangle\mathrm{ABC}\cdot\sqrt{2}=1$$

となり、

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

が簡単に求められる.

空間内に4点A（0，0，0），B$(2,\ 1,\ 1)$，C（−2，2，−4），D（1，2，−4）がある.

（1） $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ とおくとき、$\cos\theta$ の値と $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を求めよ.

（2） $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルを1つ求めよ.

（3） 点 D から、3点 A，B，C を含む平面に垂直な直線を引き、その交点を E とするとき、線分 DE の長さを求めよ.

（4） 四面体 ABCD の体積を求めよ.

（06　大分大）

（1） $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$ なので、

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=-\dfrac{1}{2}$ すなわち、$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから、

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

（2） $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)-1\cdot 2\\1\cdot(-2)-2\cdot(-4)\\2\cdot 2-1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\6\\6\end{pmatrix}\mathbin{/\!/}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

（3） $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ は平面 ABC 上にあるから、

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=k(-1,\ 1,\ 1),\ k\neq 0$ とおける.

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\perp\vec{n}$ なので、$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{n}=0$ を解いて、

$k=1$　　　$\therefore \mathrm{DE}=\sqrt{3}$

（4） 四面体の体積 V は

$V=\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}\cdot \mathrm{DE}=\dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$

＊ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の外積の大きさ $6\sqrt{3}$ は、$2\times\triangle \mathrm{ABC}$ である。

5　まとめ

新しい教育課程での入試が始まり、「ベクトルの扱いがどのようになるか」見てきた．ここ3ヵ年の中四国の国公立大における出題頻度は増え、内容も空間図形のものが多くなった．特に文系のレベルの高い大学で出題されているようだ．理系の生徒が比較的得意とし、受験での差が出にくいのに対し、文系ではベクトルを得意としている生徒に有利になっているようだ．

中四国の大学におけるベクトルの出題内容（過去3ヵ年）

①内積 ②ベクトルと平面図形 ③ベクトルと空間図形 ④空間図形、直線と球面		2006年度				2005年度				2004年度			
		①	②	③	④	①	②	③	④	①	②	③	④
愛媛大学				○	○			○				○	
香川大学			○										
徳島大学				○			○						○
高知大学				○									
岡山大学	文					○						○	
	理												
広島大学	文	○	○			○	○				○		
	理												
島根大学													
鳥取大学												○	
山口大学			○	○			○						

（参考文献）

高校数学＋α　　　　宮腰　忠（共立出版）