中四国の国立大学の入試問題について

－数学Aにおける確率から－

愛媛県立松山東高等学校　浦 田 雄 一

1　はじめに

平成15年度から新教育課程となっている。それにともなって、以前の数学Ⅰにおける確率は数学Aへと移行している。しかし、大学入試センター試験や二次試験について従来の数学Ⅰの確率と比較すると「条件付き確率」が数学Cに含まれること以外に大きな変化はないと見てよい。

本校の生徒はほとんどが大学進学を希望している。今回も昨年に引き続き、平成18年度入試の中四国の国立大学の二次試験から確率の問題を解いてもらい、それについて調べてみることにした。

2　確率に関する問題の出題状況

過去3年間に出題された平成16,17,18年度の出題状況を次ページの表にまとめてみた。中四国の全ての国立大学が確率の問題を出題しているわけではない。過去3年間を調べてみると、場合の数や期待値の問題も含めて10大学中8大学が出題している。ただ、文系あるいは理系のみの学部（学科）であったり、数学Ⅰ、Ⅱ、B、Ⅲとの融合問題がある。また、選択問題として出題しているところもある。

難易度としては、全体に見て高くはないと思われるが、場合分けが複雑であったり、工夫した計算など計算力を必要とする問題がある。問題文の意味をしっかりと理解しなければならない問題もある。

出題傾向を見てみると、大学によって大きな隔たりがある。広島大学のように毎年出題しているところもあれば、過去3年間出題していないところもある。

平成18年度入試問題の中から3題を紹介し、その中の2題について分析を行った。

平成16, 17, 18年度の中四国の国立大学入試状況（数学A　確率関係から）

大学	年度	文系		理系		数学科		医／歯／薬		備考
		前期	後期	前期	後期	前期	後期	前期	後期	
鳥取	16									
	17			○			□	○		□は数Bとの融合
	18			○	△			○		△:場合の数
島根	16			○		○		△		
	17			○	△	○				△:場
	18				△		△	○		△:期、△、○は数学Ⅰの内容を含む
岡山	16	○								○:場、数Bとの融合
	17	○								○:場
	18									
広島	16	△		○	□		☆	○		○は数Bとの融合、△:場、期、□:期
	17	△		○	□		☆	○		□、☆;数Ⅲとの融合、○は数Bとの融合
	18	○		△	□		☆	△		□、△:期、☆は数Ⅲ、Cとの融合問題
山口	16	○		○						
	17	○		○			△			○、△とも場合の数との融合
	18	△		△		○		○		△:期、数Cとの融合問題
徳島	16									
	17			○						場合の数
	18									
鳴門教育	16						○			中学校教育専修
	17						○			中学校教育専修
	18									
香川	16									
	17									
	18									
愛媛	16									
	17						○			集合の内容を含む
	18						○			場合の数
高知	16									
	17									
	18									

○:場・・・・○が場合の数の内容を含むことを表す。
△:期・・・・△が期待値の内容を含むことを表す。

3　入試問題例

Ⅰ　島根大学　前期　（医学部－医学科）

＜問題＞

3枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数をkとし、$\triangle ABC$を

$$\angle \mathrm{A}=60^\circ,\ \mathrm{AB}=2k+2,\ \mathrm{AC}=k+\frac{1}{2}$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

（1） $\Delta\mathrm{ABC}$の面積を求めよ。

（2） S_kの期待値Eを求めよ。

（3） S_kの値がEに最も近くなるkの値を求めよ。

（4） $k=k_0$のとき、辺BCの長さを求めよ。

＜解答＞

（1）

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{A} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2k+2)\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(k+1)(2k+1) \end{aligned}$$

（2） 表の出る確率がである確率は、

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_k}{2^3}=\frac{3}{4\cdot k!\cdot(3-k)!}$$

であるから、

$$S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}\text{となる確率は、}\frac{1}{8}$$

$$S_1=\frac{6\sqrt{3}}{4}\text{となる確率は、}\frac{3}{8}$$

$$S_2=\frac{15\sqrt{3}}{4}\text{となる確率は、}\frac{3}{8}$$

$$S_3=\frac{28\sqrt{3}}{4}\text{となる確率は、}\frac{1}{8}$$

したがって、求める期待値Eは

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{28\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{92\sqrt{3}}{32}=\frac{23\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

（3） (2)の考察より、

$$S_1=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$S_2=\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{30\sqrt{3}}{8}$$

よって、

$$|S_1-E|=\frac{11\sqrt{3}}{8}>\frac{7\sqrt{3}}{8}=|S_2-E|$$

ゆえに、

$$k_0=2$$

(4) $k=2$のとき、$\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{AC}=\frac{5}{2}$だから、余弦定理により、

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot 6\cdot\frac{5}{2}\cdot\cos 60^\circ\\&=36+\frac{25}{4}-15\\&=\frac{109}{4}\end{aligned}$$

ゆえに、

$$BC=\sqrt{\frac{109}{4}}=\frac{\sqrt{109}}{2}$$

Ⅱ　広島大学　後期　(総合科学科－理科系)

＜問題＞

A, B, Cの3人がそれぞれさいころを1個振る。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 3人とも同じ目の出る確率を求めよ。

(2) 3人とも互いに異なる目の出る確率を求めよ。

(3) 出した目の種類の数をk $(1\leqq k\leqq 3)$ とする。このとき、kの期待値を求めよ。

(4) 3人が出した目の積が3の倍数になる確率を求めよ。

(5) 3人が出した目の積が6の倍数になる確率を求めよ。

＜解答＞

さいころの目の出方は6^3通りで、これらは同様に確からしい。

(1) 3人とも同じ目の出るのは6通りだから、求める確率は、

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

(2) 3人とも互いに異なる目が出るのは${}_6\mathrm{P}_3$通りだから、求める確率は、

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

(3)　出た目の種類がkである確率を$P(X=k)$で表すと、(1)、(2)から

$$P(X=1)=\frac{1}{36}$$

$$P(X=3)=\frac{5}{9}$$

$$P(X=2)=1-\{P(X=1)+P(X=3)\}$$
$$=\frac{5}{12}$$

よって、求める期待値は、

$$1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{5}{12}+3\cdot\frac{5}{9}=\frac{91}{36}$$

(4)　目の積が3の倍数になるのは、少なくとも1人が3からの目を出すときだから、求める確率は、

$$1-\frac{4^3}{6^3}=1-\frac{8}{27}$$
$$=\frac{19}{27}$$

(5)　事象Eを、積が2の倍数でない

　事象Fを、積が3の倍数でない

とすると、事象$E\cap F$は積が2の倍数でも3の倍数でもない。すなわち1と5のみが出る事象だから、

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$
$$=\frac{3^3}{6^3}+\frac{4^3}{6^3}-\frac{2^3}{6^3}$$
$$=\frac{83}{216}$$

よって、求める確率は、

$$P(\overline{E}\cap\overline{F})=P(\overline{E\cup F})$$
$$=1-P(E\cup F)$$
$$=\frac{133}{216}$$

Ⅲ　愛媛大学　前期　(理学部－数学受験コース)

＜問題＞

　右図のような道のある町がある。次の場合の最短経路は何通りあるか。

(1)　A地点からB地点を通ってD地点まで行く。

(2)　A地点からC地点を通ってD地点まで行く。

(3)　A地点からD地点まで行く。

＜解答＞

（1）　A～B：$\frac{7!}{5!2!}=21$　（通り）

B～D：1　（通り）

よって、A～B～Dは21通り

（2）　A～C：$\frac{7!}{4!3!}=35$　（通り）

C～D：$\frac{5!}{4!1!}=5$　（通り）

よって、A～C～Dは$35\times 5=175$　（通り）

（3）（i）　A～B～Dは21通り

（ii）　A～C～Dは175通り

（iii）　A～E～Dは$\frac{6!}{5!1!}\times\frac{6!}{4!2!}=90$　（通り）

（iv）　A～F～Dは$\frac{6!}{5!1!}=6$　（通り）

(i)～(iv)より、全体は、$21+175+90+6=292$　（通り）

4　入試問題の分析および考察

問題Ⅰ（対象生徒：2年生理系38名、設定時間40分）

＜正誤人数＞

	（1）	（2）	（3）	（4）
正答	34	21	19	16
誤答	4	17	19	22
無答	0	0	0	0

＜主な誤答例＞

（1）　・kを用いてS_kを表していない。（2名）

・$\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$とした。（1名）

・$\sin 60^\circ$のところを$\cos 60^\circ$とした。

（2）　・面積値を代入せずに$0,\ 1,\ 2,\ 3$を代入している。（7名）

・立式は合っているが、計算ミスをした。（2名）

・$\sqrt{3}$の書き忘れ。（2名）

・$S_0 = 0$とした。(2名)

・(1)が間違えたため。

(3)　・(2)を間違えたため。(13名)

・たまたま$k_0 = 2$が合った。(上記の13名中5名)

・kの方程式から、$k = \dfrac{-3 \pm \sqrt{93}}{4}$まで出したけど、そこで終わっている。(2名)

・S_kの方程式を平方完成させてから最小値を求めようとした。(1名)

・S'_kを求めて考えようとした。(1名)

(4)　・(3)を間違えたため。(16名)

・計算ミスやケアレスミス(2名)

＜考察＞

(1)は$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} bc \sin A$の公式を用いて、$S_k$を求める問題である。$k$が$0 \leqq k \leqq 3$の整数だから、場合分けによって$S_0$～$S_3$を求めている者が2名いた。

(2)は期待値を求める問題である。$k = 0$，1，2，3のときの確率と、そのときの面積が必要であるのに、その確率とkの値をかけている。(S_kの値をかけていない。)これは表の枚数の期待値である。期待値の定義式は言えているのだが、計算から何が出たのかを確認しなければならない。また、計算の工夫の一つとして約分せず通分した状態で計算式を立てることも知っておくと便利である。

(3)は(2)の期待値を用いて答える問題である。このように順を追って解く問題は早めの段階でミスをしたら致命傷になり大きく点を落とすことになりかねない。S_1とS_2の間にEがあるので、kは1か2のいずれかになる。その求め方として正解者19名の中で、(i)通分して比較した者が11名、(ii)$S_k = E$の2次方程式から求めた者が8名であった。「kは整数」という観点から(i)のほうが望ましいと思う。

(4)は(3)でたまたま$k = 2$となった者の答案も正答とした。ここでは、数学Ⅰの内容である「三角比」から余弦定理を用いて解かなければならない。(3)で間違えたため不正解となった22名全てのものが余弦定理を用いた答案であった。

問題Ⅱ(対象生徒:2年生理系37名、設定時間40分)

＜正誤人数＞

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
正答	33	31	20	21	5
誤答	4	6	16	15	27
無答	0	0	1	1	5

＜主な誤答例＞

(1)　・$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$としていた。(4名)

(2)　・3人のうち2名が同じ目の出る確率を${}_3C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 6=\frac{1}{2}$とし、$1-\frac{1}{36}-\frac{1}{2}=\frac{17}{36}$とした。(2名)

・$\frac{{}_6C_3}{6^3}=\frac{5}{54}$とした。(1名)

(3)　・立式は合っているが計算ミスをしている。(6名)

・(1)や(2)から考え方に間違えがある。(6名)

・全ての確率を$\frac{1}{3}$として考えた。(1名)

・「出た目の数」と「出た目の種類の数」の読み間違い。(1名)

(4)　・樹形図や辞書式の利用で場合分けをして考えたが、立式を間違えた。(11名)

・$1-{}_3C_2\left(\frac{4}{6}\right)^3$とした。(3名)

・$1-\left(\frac{2}{6}\right)^3$とした。(1名)

(5)　・樹形図や辞書式の利用で場合分けをして考えたが、立式を間違えた。(14名)

・1と2と3になる確率を$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$とした。(3!をかけていない)。(4名)

・6だけに注目して、2や3について考えていない。(3名)

・6の目が出る確率を${}_3C_2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$とした。(2名)

・$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3+{}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2$とした。(1名)

＜考察＞

(1)は独立試行の基本的な問題である。正解者33名のうち、(i)$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6$の者が14名(43%)、(ii)$\frac{6}{6^3}$の者が13名(39%)、(iii)$1\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$の者が6名(18%)であった。

(2)ではP(順列)とC(組合せ)を見分ける能力が必要である。

(3)は(1)、(2)の答えを利用すれば、$k=2$のときの確率は容易に求めることができる。しかし、この「余事象」を利用した者は正答者のうち12名(60%)であった。

（4）ではここでも「余事象」の考え方が有効である。キーワードは“少なくとも”であるが、問題文章にない場合この考えができるかどうかが問われる。

（5）は正解率が非常に低かった。その原因は場合分けによって求めようとしたためである。煩雑になり間違えている。この問においては「余事象」の考え方により2つの重要公式が解答に出ている。それは、

$$P\left(E \cup F\right) = P\left(E\right) + P\left(F\right) - P\left(E \cap F\right)$$

と

$$P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{E \cup F}\right) = 1 - P\left(E \cup F\right)$$

である。「確率の加法定理」と「余事象」についてはベン図の利用で理解を深め、慣れる必要があると思う。

5　おわりに

「確率」という分野は代数、幾何、代数幾何、解析と比べると異質なところが多い。言い換えれば、それだけ考え方が重要視されるともいえる。中学校で学習した樹形図や辞書式に並べるということが基本であるが、大学入試問題になると“もれなく　かつ　重複することなく”さらには効率的に数え上げることを要求される。そのためには、性質や特徴に着目し、一定の法則を見つけ計算する能力を養うことが重要になってくる。代表的な問題を用いて、一般的な手順を理解させることが大切である。

確率は方程式の解を求めた際のような検算法がないため、発送の段階がとても大切であることに注意し指導しなければならない。特に、反復試行や独立試行の問題はいろいろな応用問題がある。代表的な問題を取り扱う中で生徒たちに問題に慣れさせる必要がある。

以上のような点を再確認し、今後の指導に役立てていきたい。

＊参考文献：平成18年度　国立大学　全国大学数学入試問題詳解（聖文新社）