平成２０年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校　　中井　賢哉

１　はじめに

5月17日（土）に松山南高校において、愛媛大学の平田教授より平成20年度の愛媛大学数学入試問題の解説があった。後期工学部において数学が課されるようになったこと、前期日程の問題でも小問５問が出題されたことなどに触れ、大学側は、受験生の学力の差をしっかりと見極めたいとの話であった。どこで学力差が顕著に表れたのか、現役生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

２　出題傾向の考察

(1)　出題形式

例年通り、教育・農・医・工学部とも全問記述４題を100分、理学部数学受験コースは全問記述５題を120分で解答する。今年度より工学部の後期日程で数学が課されるようになり、全問記述４題を100分で解答する。

教育・農学部　$\boxed{1}$～$\boxed{4}$　（Ⅰ・Ⅱ・A・B）
工学部　$\boxed{4}$～$\boxed{7}$　（Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B）
理学部　$\boxed{4}$～$\boxed{7}$、$\boxed{9}$　（Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C）
医学部　$\boxed{4}$、$\boxed{6}$～$\boxed{8}$　（Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B）
工学部後期$\boxed{1}$～$\boxed{4}$（Ⅱ・Ⅲ・B）

(2)　出題内容

$\boxed{1}$　小問５問
$\boxed{2}$　２次関数・図形と方程式
$\boxed{3}$　方程式と不等式・三角関数
$\boxed{4}$　ベクトル
$\boxed{5}$　小問５問
$\boxed{6}$　微・積分法
$\boxed{7}$　微分法
$\boxed{8}$　微・積分法
$\boxed{9}$　行列

後期工学部
$\boxed{1}$　小問５問
$\boxed{2}$　小問５問
$\boxed{3}$　数列
$\boxed{4}$　微・積分法

(3)　難易度

昨年度と同様大きな変化はない。基本～標準レベルの問題を中心に出題されている。特に小問５問は、基本事項を理解していれば、完全に解ける。昨年より基礎力を重視した出題である。

３　平成20年度入試問題の分析

(1)　本校の現３年生に入試問題を解いてもらう

９月下旬に本校３年生文系生徒42名に$\boxed{1}$～$\boxed{4}$を，理系生徒43名と39名の２クラスに$\boxed{4}$～$\boxed{7}$と後期工学部の問題をそれぞれ解かせた。解答時間は各テスト100分。採点基準は公表されていないため、定期考査に準じた採点を行った。配点は１問25点とし、満点は100点とした。

(2)　問題分析

$\boxed{1}$

次の問いに答えよ。

(1)　10000以下の自然数のうち，8の倍数の集合をA，12の倍数の集合をB，16の倍数の集合をCとする。$A\cap B\cap C$の要素の個数を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{x}{2}-y\right)^{12}$の展開式において，$x^5y^7$の係数を求めよ。

(3)　次の方程式を解け。

$$\log_2\frac{x}{2}+\log_4(32x)+\log_8\frac{x^3}{\sqrt{8}}=6$$

(4)　関数$f(x)=ax^3+bx^2+x+1$が$x=1$で極小値1をとるとき，定数a，bを求めよ。

(5)　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)(x-1)dx$を求めよ。

得点度数分布

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
文系	16.5	0	4	8	20	10	0

得点率　66.1％　標準偏差4.4

《考察》

(1)について

得点率 58.6%であった。正答か誤答かの両極端な結果であった。誤答の殆どが、４８の倍数の個数を求めればよいことに気づいていない。

(2)について

得点率 61.9 ％であった。(1)と同様に正答か誤答かの両極端な結果であった。誤答の殆どが、2 項定理を理解してなく、無答または筋違いな解答であった。誤答者のうち数名の者は、x,y の係数を考慮してなく減点した。

(3)について

得点率 38.7 ％であった。計算力の差が出た問題であった。誤答の殆どが、式変形で計算ミスをしている。特に多かったのは、$\log_8\dfrac{x^3}{\sqrt{8}}$を底 2 の対数に変形するところでのミスであった。

(4)について

得点率 76.2 ％であった。殆どの者が、a,b の値を求めることはできていたが、極値をとることの確かめができてなく減点した解答が多かった。

(5)について

得点率 95.2 ％であった。殆どの者が正答であった。

2

2次関数 $y=-x^2+6x-5$ $(1\leqq x\leqq 4)$ のグラフにおいて，$x=1$，$x=4$ のときの2つの端点をそれぞれA，Bとし，点Cをこの曲線上の動点とする。

(1) この2次関数のグラフをかけ。

(2) 以下のそれぞれの条件を満たす点Cの座標を求めよ。

(ア) △ABCの面積が3である。

(イ) △ABCの面積が最大である。

(ウ) △ABCがAC＝BCとなる二等辺三角形である。

得点度数分布

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
文系	13.７	2	11	10	10	5	4

得点率 54.7％　標準偏差 6.8

《考察》

(1)について

得点率 92.4 ％であった。殆どの者が正答であった。数名は、頂点の座標等を明記してなく減点した。

(2)(ア)について

得点率 64.6 ％であった。直線ＡＢと動点Ｃの距離を求める解法が多数であった。方針は良いが、絶対値を上手く扱えなくミスで終わっている解答が多く、得点率が低くなった。一部、三角形の頂点の座標を使った、面積の公式$\frac{1}{2}|ad-bc|$を使って求める解法もあった。

(2)(イ)について

得点率 28.6 ％であった。(1)を用いて、直線ＡＢと動点Ｃの距離が最大になるａの値を求めることはできていた。しかし、座標を求める際、計算ミスをして減点。また、誤答の中には、点Ｃが頂点のとき、面積が最大であると勘違いしている解答もあった。

(2)(ウ)について

得点率 36.1 ％であった。ＡＣ＝ＢＣを用いての解法が多かった。しかし、計算が煩雑でミスをして減点。線分ＡＢの垂直二等分線と放物線の共有点を求める解法が数名いた。こちらの解法の方が正答率が高かった。

3

a と θ を定数とし，3次方程式

$$8x^3-12x^2+x+a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ $(\sin\theta\neq\cos\theta)$ を解にもつとする。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t で表せ。

(2) (1)でおいた t の値を求めよ。

(3) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を解とする2次方程式を1つ作れ。

(4) 定数 a の値と3次方程式 ① のすべての解を求めよ。

得点度数分布表

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
文系	7.４	2	11	10	10	5	4

得点率 29.4％　標準偏差 4.9

《考察》

(1)について

得点率 96.7 ％であった。殆どの者が正解であった。

(2)について

得点率 18.8 ％であった。殆どのものが 3 次方程式の解と係数の関係を用いての解答であり、出題者の意図とは異なるものであった。誤答は、大きく分けると２つである。１つは解と係数の関係から連立方程式を導くものの方程式を解けず部分点のみに終わる。もう１つは、解と係数の関係を理解してなく関係式が誤っている解答である。文字が多く計算力が必要とされた問題であった。

(3)について

得点率 11.1 ％であった。(2)が正解しているものは、殆ど正解であった。その他は無答であった。

(4)について

得点率 6.0 ％であった。(3)で求めた方程式を解くのでなく、$sin\theta$，$cos\theta$と答えている誤答があった。

4

△ABCの外心をO，点Aを通る外接円の直径をAA′とし，BCの中点をD，点Dに関し点A′と対称である点をHとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$ とおく。

(1) $\vec{h}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$ を示せ。

(3) $\theta=\angle ABC$ とし，R を外接円の半径とする。

$BH=2R|\cos\theta|$ であることを示せ。

得点度数分布表

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
文系	6.７	27	2	2	7	2	2
理系	12.０	14	5	1	13	2	8

得点率 36.9％　標準偏差 9.4

《考察》

(1)について

得点率 54.7 ％であった。誤答に占める無答の割合が多かった。どこから手を付けてよいのか分からないのだろう。中には設問の図を誤って描いていた者もいた。

$\overrightarrow{OH}$と$\overrightarrow{OD}$の関係式を求めてから$\overrightarrow{OH}$を求める考え方が難しかったのだろう。大きく差が出た設問であったと思われる。

(2)について

得点率 40.7 ％であった。内積の計算だけであったので、(1)が正解しているものは殆ど正解であった。誤答は殆どが無答であった。

(3)について

得点率 14.9％であった。誤答の大半は無答であった。

他は、証明の方針は正しいが、内積$\vec{a}\cdot\vec{c}$をRと$\cos\theta$で表すことができず部分点のみであった。

$\boxed{5}$

次の問いに答えよ。

(1)　△ABCにおいて，$AB=1+\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{2}$, $\angle B=45^\circ$ とする。CA の長さと ∠A の大きさを求めよ。

(2)　$(a+2b)^6(c-d)^7$ の展開式において，$a^4b^2c^2d^5$ の係数を求めよ。

(3)　次の方程式を解け。

$$\log_2\frac{x}{2}+\log_4(32x)+\log_8\frac{x^3}{\sqrt{8}}=6$$

(4)　関数 $y=\sin^2(3x)$ を微分せよ。

(5)　定積分を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$ を求めよ。

得点度数分布

類型	平均点	0～4	5～9	10～14	15～19	20～24	25
理系	16.8	1	4	7	17	13	1

得点率 67.3％　標準偏差 5.3

《考察》

(1)について

得点率 90.7 ％であった。殆どの者が正解であった。

(2)について

得点率 44.2 ％であった。文系の問題$\boxed{1}$(2)と同様に正答か誤答かの両極端な結果であった。誤答の殆どが、2項定理を理解してなく、無答または筋違いな解答であった。

(3)について

得点率 54.0 ％であった。文系の問題$\boxed{1}$(3)と同じ問題である。文系と同様に計算力の差が出た問題であった。誤答の殆どが、式変形で計算ミスをしている。特に多かったのは、$\log_8\frac{x^3}{\sqrt{8}}$ を底 2 の対数に変形するところであった。

(4)について

得点率 87.4 ％であった。殆どの者が正解であった。

(5)について

得点率 60.5 ％であった。正答か誤答かの両極端な結果であった。殆どの誤答はΣで表すことができたものの定積分に持ち込めず部分点のみであった。

$\boxed{6}$

aを実数とし，$f(x)=\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ とおく。

(1)　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が最小値 -2 をもつとき，aの値を求めよ。

(3)　aを(2)で求めた値とするとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

得点度数分布表

類型	平均点	0～4	5～9	10～14	15～19	20～24	25
理系	14.1	7	7	8	5	10	6

得点率 56.3％　標準偏差 8.6

《考察》

(1)について

得点率 83.4 ％であった。殆どの者が正解であった。

(2)について

得点率 47.5 ％であった。誤答の殆どが a の値での場合分けができてなく部分点のみであった。導関数の符号を考察する際、a の符号で異なるから場合分けの発想はさほど難しくないと思われるが、思いのほか正答率は低かった。

(3)について

得点率 39.0 ％であった。(2)で正答のものは殆ど正答であった。誤答の殆どは(2)で誤答であったため無答であった。

$\boxed{7}$

$f(x)=x\log|x-1|$ とおく。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$ を求めよ。

(2)　$x>1$ において，導関数 $f'(x)$ の極値を求めよ。

(3)　関数 $y=f(x)$ の増減，極値，曲線の凹凸を調べてグラフをかけ。

得点度数分布表

類型	平均点	0～4	5～9	10～14	15～19	20～24	25
理系	8.6	15	11	9	4	3	1

得点率 34.2％　標準偏差 6.8

《考察》

(1)について

得点率 48.4％であった。∞の誤答が多かった。

(2)について

得点率 43.3％であった。導関数 f"(x)の極値を求めよという問いの意味がわからないのか f(x)の極値を求めようとしている誤答が多かった。

(3)について

得点率 18.1％であった。誤答の多くが、x=0 で極値をとることに気づいてなく、増減・凹凸表が正確に描けていない。0 点が半数以上あり、絶対値が含まれる関数のは予想以上に難しいと思われる。

1

次の[ ]に適する数または式を，解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　a, b は実数で $a+bi \fallingdotseq 0$ とするとき，$\dfrac{1}{a+bi}=\boxed{ア}+\boxed{イ}\,i$ である。
ただし，ア，イは実数で，i は虚数単位である。

(2)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$ を満たすとき，
内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{ウ}$ である。また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，
$\cos\theta=\boxed{エ}$ となる。

(3)　p，q を実数とする。$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{p+q\cos x}{x^2}=1$ のとき，$p=\boxed{オ}$，
$q=\boxed{カ}$ である。

(4)　(ⅰ) $\dfrac{d}{dx}e^{\frac{1}{x}}=\boxed{キ}$　　(ⅱ) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\boxed{ク}$

(5)　(ⅰ) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx=\boxed{ケ}+C$ (Cは積分定数)
(ⅱ) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx=\boxed{コ}+C$ (Cは積分定数)

得点度数分布表

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
理系	12.2	6	7	7	12	5	2

得点率 48.7％　標準偏差 6.9
問題１は答えのみなので、各問いの得点率を挙げておく。

問題	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
得点率	53.8%	54.4%	17.9%	62.1%	59.5%

部会開催の入試説明会で聞いた話だが、後期試験での採点日数が十分にないため、答えのみの小問を出題したらしい。各問題とも基本的な問題であり、得点率も６割程度の良問であったと思う。ただ、(3)のみ他と比べ難易度が高かったように思われる。

2

次の問いに答えよ。

(1)　1.25^n の整数部分が4桁であるような整数 n の範囲を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(2)　次の無限等比級数が収束するような実数 x の範囲を求めよ。また，収束するときの和を求めよ。

$$1-\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}x^2-\frac{64}{27}x^3+\cdots\cdots$$

(3)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{3}}\{\cos(\pi x)+2\sin(\pi x)\}\,dx$ を求めよ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4}{n^5}$ を求めよ。

(5)　曲線 $y=x+\dfrac{1}{2x}$ $(1\leqq x\leqq 2)$ と2直線 $x=1$，$x=2$ および x 軸で囲まれる部分を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

得点度数分布表

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
理系	11.4	7	10	9	6	6	1

得点率 45.5％　標準偏差 7.3
《考察》
(1)について
得点率　34.9　％であった。誤答の殆どが無答または誤った不等式で 1.25^n を評価していた解答であった。
(2)について
得点率　60.0　％であった。無答は少なかった。収束条件が $|r|\leqq 1$ で解いている誤りが多かった。無限級数と数列の収束条件が混同していると思われる。
(3)について
得点率　45.6　％であった。誤答の殆どが、合成関数であることに気づかず係数に $\dfrac{1}{\pi}$ を付け忘れている解答が多かった。
(4)について
得点率　27.2　％であった。誤答の殆どが無答、または極限値を直接計算しようとして、区分求積に持ち込めない解答であった。
(5)について
得点率　60.0　％であった。無答は少なかったが、グラフの概形を描こうとしてミスしたり、$\dfrac{1}{x^2}$ の積分の計算間違いが多かった。

3

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。
(2)　a_{n+1} を a_n と n で表せ。
(3)　一般項 a_n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

得点度数分布

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
理系	14.4	10	5	5	1	6	12

得点率 57.5％　標準偏差 9.8
《考察》
(1)について
得点率　75.2　％であった。殆どの者が正解であった。
(2)について
得点率　52.6　％であった。(1)から類推しようと試みた

誤答が多かった。
(3)について
得点率 42.6 ％であった。数学的帰納法の証明自体は易しかったので、(2)が正答した者は殆ど正解していた。

$\boxed{4}$

$x>0$ とし，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおく。

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べて，極値を求めよ。
(2) 曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べて，変曲点を求めよ。
(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標を a とし，(2) で求めた変曲点の x 座標を bとする。$\int_a^b f(x)dx$ を求めよ。

得点度数分布

類型	平均点	０～４	５～９	10～14	15～19	20～24	25
理系	15.6	5	9	3	3	5	14

得点率 62.3 ％　標準偏差 9.2
(1)について
得点率 81.7 ％であった。殆どの者が正解であった。
(2)について
得点率 60.4 ％であった。第 2 次導関数を求める際、計算間違いで誤答。解答の方針が良くても、最初に間違うと点が取れない。計算力の差が出た問題である。
(3)について
得点率 44.9 ％であった。計算方針は良いが、積分の計算に苦心している。t=logx と置換した解答は正答率が高かった。

4　おわりに

今年度の出題も基本～標準レベルの良問であった。昨年度より簡単だったと思う。誤答分析をして強く感じたことは、基本内容の理解と計算力の重要性である。基本問題の出題率が高く、解答方針は立てやすい。いかに計算ミスをなくして答えまでたどり着けるかが大きなポイントになる。特に、小問 5 題の出題は、大問に比べて、点を取りやすい。確実に点を取りたいが、広範囲から出題しているので基本を理解してない、計算力がない者は大きな失点をしている。小問の出題は、受験生の学力差を見極めたいという大学側の意図を感じるものであった。来年度も出題されるのではないだろうか。教科書レベルの基本問題をしっかりと理解しておくことが対策になるだろう。また、大問で大きく差が出た理由の一つに、最初の(1)を解くことができず、大きく減点した生徒が多かったことである。特に、問題$\boxed{4}$のベクトルは顕著であった。

ごく当たり前のことであるが、定期考査レベルの問題を手堅く解くことができる実力をつけることが何よりの対策だと改めて感じた。今後の指導に生かしたいと思う。