国公立大学入試問題の研究

－ＡＯ・推薦入試の問題から－

愛媛県立三島高等学校　　五味　稔

1　はじめに

2000 年度、東北大、筑波大、九州大の３校で始まった国立大のＡＯ入試は年々増え続け、今年で 10 年目の節目を迎える。そして、国大協が分離分割方式を原則としつつも、後期日程廃止の条件としてＡＯ・推薦の導入を義務づけたことで 2006 年度を境に、後期日程廃止からＡＯ入試増加という新しい傾向が目立ち始めた。さらに 2008 年度、国大協は従来３割以内としていたＡＯ・推薦の定員枠を５割へ引き上げる新方式を打ち出したことにより、ＡＯ入試への注目度がいやがおうにも高まっている。

国公立大学入学定員 127,919 人のうち、ＡＯ入学定員は 3000 人にも満たない。ただ、導入当初から比べると急ピッチで増え続けており、数年後の状況は一変することが予想される。また、ＡＯ定員数が 3000 人にもかかわらず、志願者総数は１万人の大台に迫っているのが注目される。

出題問題の中から、昨年度の中四国の国公立大学のＡＯ・推薦入試で実際に出題された数学の問題を取り上げてみる。

2　２００７年ＡＯ入試問題から

① 第１問

半径１の球が２個接している。この２個の球のどちらにも接するように半径 r の球を12個置き、これらの12個の球がすべて両隣りと接るようにしたい。この状況を図を用いて説明し、r の値を求めよ。

第２問

（1）非負の実数 $x \geqq 0$ に対して $1+x \leqq e^x \leqq 1+e^x x$ が成り立つことを示せ。

（2）非負の実数 $x \geqq 0$ と自然数 $n \geqq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqq e^x \leqq \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成り立つ。その理由を考え、説明せよ。ただし、$0!=1$と定義する。

（3）自然対数の底 $e=2.718\cdots$ が有理数でないことを次のようにして証明せよ。

e が有理数である仮定して $e=\dfrac{m}{n}$（ただし mは自然数，n は２以上の自然数）とおく。(2)の式に $x=1$ を代入し、全体に$n!$をかける。このとき矛盾が導かれることを示す。

（2008　岡山大学・理・数学・ＡＯ）

② 第１問

江戸時代に発達した日本の数学を和算といいます。和算家は自分の考案した数学の問題を神社仏閣に奉納(これを「算額」といいます)し、他の和算家に解くように求めました。またその問題を解答した和算家はその問題をさらに発展させて、算額を掲げました。（これを「遺題継承」といいます)このようにして和算は江戸時代を通じて飛躍的に進歩しました。

いま、ある中学校で算額を作っています。それは次のような問題でした。

算額の問題Ａ：「１辺２の正方形$ABCD$の中に３つの円を図1.1のように配置しています。大円は正方形の４辺に接し、左右の２つの小円はそれぞれ正方形の２辺および大円に接しています。３円の面積の和を求めよ。」次の問いに答えよ。

図 1.1

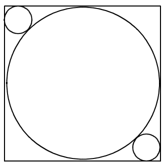
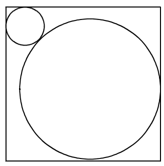


図1.2



（1） 算額の問題Ａを解け。

（2） 算額の問題Ａを発展させて、以下のような問題を作ってみた。「１辺２の正方形ABCDの中に図1.2のように２つの円は外接し、その２つの円は同時にそれぞれ正方形の２辺に内接している。左の円をSそして右の円をTとして、それぞれの円の半径をs , t とする。

（イ） s と t の和が一定であることを示せ。

（ロ） s と t の値を変えるとき、SとTの面積の和の最大値と最小値、およびそれぞれのときの s と t の値を求めよ。」

このとき、問(イ)(ロ)に答えよ。

（3） 算額の問題Aを発展させた問題を新たにつくれ。

第２問

実数定数b , c に対して、３つのx の整式

$$f(x)=x^4+2x^2+4bx+c+1$$
$$g(x)=x^3+x+b$$
$$h(x)=x^2+3bx+c+1$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。

（1） 等式 $f(x)=xg(x)+h(x)$ が成り立つことを示せ。

（2） $g(x)$ を $h(x)$ で割ったときの商 $A(x)$ と余り$B(x)$ を求めよ。

（3） 実数 α に対して、関数 $y=f(x)$ のグラフが点(α , 0)でx 軸に 接するならば、$B(\alpha)=0$ であることを示せ。

（4） $c \fallingdotseq 9b^2$ のとき、関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と接するための必要十分条件は

$$27b^4-2(9c+8)b^2-c^2(c+1)=0$$

であることを証明せよ。

第３問

正の数 a, b で $a+b=5$ を満たす組(a, b)は、(1 , 4) , (2 , 3) , (3 , 2) , (4 , 1)となり、その個数は４である。３つ以上の整数の組の場合も同じように考えて、次の問いに答えよ。

（1） 正の整数 s, t, u で $s+t+u=5$ を満たす組(s, t, u)をすべて示 しその組の個数を求めよ。

（2） 正の整数 v, w, x, y で $v+w+x+y=16$ を満たす組(v, w, x, y) の個数を求めよ。

（3） 正の整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ で $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ を満たす組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の個数を求めよ。ただし、m, n は２以上の整数とする。

（2008　広島大学・教育・数理系・ＡＯ）

③　第１問

実数全体で定義され、次の性質を満たす関数 $f(x)$ で定数関数以外の例を、それぞれ１つずつあげよ。

（1） $f(xy)=f(x)f(y)$　　（2） $f(x+y)=f(x)f(y)$

（3） $f(-x)=f(x)$　　（4） $f(x+y)=f(x)+f(y)$

（5） $f(-x)=-f(x)$　　（6） $f(x+\pi)=f(x)$

（7） $f(xy)=x^n f(y)$　ただし、n は自然数

（8） $f(x+y)=f(x)+2xy+f(y)$

第２問

$\triangle OAB$ の辺 OA の中点を M とし、辺 OB 上の OB の中点とは異なる点 P を考える。２点 A, B を通る直線と２点 M, P を通る直線の交点を R で表し、$\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

（1） 点 P が辺 OB を $1:2$ に内分するとき、ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

（2） 点 P が点 O とも点 B とも異なるとき、

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{PB}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{BR}|}{|\overrightarrow{RA}|}=1$$

が成り立つことを示せ。

第３問

（1） 放物線 $C: y=x^2$ と直線 l が２点 (α, α^2) と (β, β^2) で交わったとする。ただし、$\beta>\alpha$ とする。このとき、C と l によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ となることを示せ。

（2） 放物線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=ax+b$ が２点で交わり、C と l によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{4}{3}$ であるとする。このとき、b を a の式によって $b=f(a)$ と表せ。

（3） s と t を実数とする。（2）で求めた式 $f(a)$ を用いて、直線 l_s と l_t を $l_s: y=sx+f(s)$, $l_t=tx+f(t)$ と定める。$s \fallingdotseq t$ のとき、l_s と l_t の交点を求めよ。s を t に限りなく近づけるとき、l_s と l_t の交点の座標が、ある点 Q_t の座標に限りなく近づくという。Q_t の座標を t によって表せ。

（4） t がすべての実数値を動くとき、点 Q_t はどのような図形を描くか。その軌跡を求めよ。

第４問

k, n を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とする。異なる n 個のものから、並べる順序を考えずに k 個とる組み合わせの総数を ${}_nC_k$ と表す。このとき、以下の問いに答えよ。

（1） ${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ と表されることを証明せよ。ただし、$0!=1$ と定める。

（2） $1 \leqq k<n$ のとき、

$${}_nC_k={}_{n-1}C_k+{}_{n-1}C_{k-1}$$

となることを示せ。ただし、${}_nC_0=1$ と定める。

（3） x, y を正の数とするとき、すべての自然数 n に対して、$(x+y)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^k\,y^{n-k}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

第５問

自然数 $n \geqq 2$ に対して $f(x)=e^{-nx}x^n$ ($x \geqq 0$) とおく。以下の問いに答えよ。ただし、任意の自然数 k に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-nk}x^k=0$ であることを用いてよい。

（1） 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ。

（2） $x \geqq 0$ における関数 $y=f(x)$ の増減，極値，凹凸を調べて、そのグラフの概形をかけ。

（3） 極限値 $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-nx}x^n dx$ を n を用いて表せ。

（4） $n \geqq 2$ のとき $n! \geqq e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$ が成り立つことを示せ。

（2008　広島大学・理・数学・ＡＯ）

３　２００７年推薦入試問題から（抜粋）

以下に推薦入試における教科面接の質問内容を紹介する。

- $y=|x-3|$ のグラフをかきなさい。
- $x^2+2x-4<0$ を解きなさい。
- $y=x^2+2x-4$ のグラフをかきなさい。
- $y=x$ を導関数の定義に従って微分しなさい。

（鳥取大・工・応用数理・推薦）

- $y=\log x$ のグラフと $y=e^x$ のグラフの関係を説明しなさい。
- $a>0$ のとき、$y=a^x$ のグラフをかきなさい。
- 「互いに素」の意味。
- 15^8 は何桁か。
- $\log_a b+\log_b a \geqq 2$ を証明しなさい。

（島根大・総合理工・数理情報・推薦）

・円柱に内接する円錐と球の体積比を求めなさい。
(円柱：円錐：球)
・$y=\log x$を導関数の定義に基づいて微分しなさい。
・３桁の数字$3n$の百の位、十の位、一の位の数を足すと３の倍数になることを証明しなさい。
・$0\leqq\theta\leqq 2\pi$において$x=\cos\theta$，$y=\sin 2\theta$とする。
① 点(x, y)の軌跡をグラフにかきなさい。
② ①のグラフとx軸が囲む面積を求めなさい。
・３次関数$y=x^3-7x+6$のグラフの概形をかき、極大・極小・変曲点を求めなさい。
(岡山大・工・機械，電気電子・推薦)

・$y=x^3-9x$のグラフを増減表とx軸との交点、極値などからえがく。
・$y=x$と$y=x^2$に囲まれた部分の面積を求めなさい。
・$5\leqq y, x\geqq 0, (x-2)^2\geqq 4$で表される範囲を図示する。
・３次関数のグラフの増減を調べ、概形をかかせる。
・２次関数の２実数解、重解をもつそれぞれの範囲を求めなさい。
(山口大・工・機械，電気電子，知能情報・推薦)

・$\int_1^e \log x\,dx$を計算しなさい。
・$x^2+x+1=0$の根をα, βとするとき、$\alpha^3+\beta^3$の値を求めなさい。
・$x+3>5$，$x^2-2x-1<0$を解きなさい。
・20人のクラスで数学が好き10人、英語が好き8人、ともに好きが5人の場合、どちらも嫌いは何人か。
・$\sum_{k=1}^{n} 3(2k-1)$を計算しなさい。
・三角関数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$のグラフをかき、導関数を求めなさい。
・20人の中から2人を選ぶとき、特定の5人から2人を選ぶ確率を求めなさい
・$\log_{10}2=0.3010$のとき、2^{10}は何桁の数か。
・$y=x^3-3x^2+2\ (-3\leqq x\leqq 3)$の最大値と最小値を求めなさい。
・3人の相手がいる。Aに勝つ確率が$\frac{1}{3}$，Bに勝つ確率が$\frac{2}{5}$，Cに勝つ確率が$\frac{1}{10}$のとき、少なくとも一人に勝つ確率を求めなさい。
(徳島大・工・機械，電気電子，知能情報・推薦)

・１ラジアンと60°の大小を答えなさい。
・$\log_{20}30$と$\log_2 3$の大小を答えなさい。
・自分の好きな公式を紹介し、証明しなさい。
(香川大・教育・学校教育教員養成課程数学領域・推薦)

次の命題の真偽をいえ。
・すべての角度θで$|\sin\theta|+|\cos\theta|\geqq 1$が成立する。
・$P>1$のとき、$x^2-2Px-1=0$は相異なる２つの実数解を持つ。
・$\triangle ABC$で重心を通る直線は面積を二等分する。
・さいころを２回投げるとき、和が６になるときと和が８になるときの確率は等しい。
(愛媛大・理・数学・推薦)

・$y=\log x$を微分しなさい。
・$y=\sin x$を積分しなさい。
・$y=x$という関数をxが0から10までの範囲で区切り、積分すると何が求められるか説明しなさい。
(愛媛大・農・地域環境工学コース・推薦)

４　まとめ

ＡＯ入試の筆記試験と、推薦入試の教科口頭試問の内容の一部を紹介した。見て分かるように、口頭試問に関しては数学系の学科でさえも、非常に簡単な問題が多い。

現高校一年生のことを本校では”ゆとりマックス”と呼んでいる。本人たちが、小学一年次から全国でゆとり教育が始まった。ここから数年間、以前にも増して表現力（書く・話す）に乏しい子たちが高校へ入学してくることになる。ゆとり全盛時代には、大学入試といっても、具体的でかつ説明をしながら、間を取り頭の中を整理できる程度の質問になっているのか、と分析する。また、数学ⅡＢまでの内容が中心になっているのは、受験生が通う学校によって既習事項に差があり、それが学力差と取られるなどの有利不利が働かないようにとの配慮と考える。

問題全般を見て、全学をあげてＡＯ入試に力を注いでいる広島大の入試問題が、私個人としてはよく練られた良問が多いと思われる。いろいろな関数の特徴を身に付けた、高３の夏休みの補習あたりで解かせたい問題である。

とはいえ、一受験生の進路実現を考えた場合、２月末までじっくりと一般入試に向けた実力を付けさせていくべきか、教科の学力はそこそこでＡＯや推薦入試などの表現力や本人の持つ付加価値で勝負させるべきかを見極める指導力が今の担任には求められる。３年担任として負担の増す入試スタイルであることに間違いない。