国公立大学入試問題の研究

－ＡＯ・推薦入試の問題から－

愛媛県立三島高等学校　　五味　稔

1　はじめに

2000年度、東北大，筑波大，九州大の３校で始まった国立大のＡＯ入試は今年で10年余が経過し、年々増え続けてきた。

現在、今年度入試での形態別の学校数では、国立大学82校中、ＡＯ入試実施校が45校，推薦入試実施校が74校、公立大学77校中、ＡＯ入試実施校が20校，推薦入試実施校が73校にのぼる。特に公立大学にいたっては県内市内枠のしばりがほとんどの大学でなされ、地域に根ざした人材の育成に力が注がれている。それぞれが生き残りをかけて、募集に独自性を出そうとしていることが分かる。また、横浜市立大や新見公立大にいたっては、公立大にもかかわらず指定校制度を導入するなど、今後さまざまな憶測を呼びそうである。

近年、国立大の一部では後期日程を廃止し、ＡＯ入試への転換が進んでいる。北大，東北大，京都工芸繊維大，広島大，九州大などがそうである。

ＡＯ入試でも推薦入試でも、文部科学省は2011年度入試から、出願基準の明確化と学力把握措置の強化に重点を置くよう通達している。評定基準の見直しや、センター試験を利用する推薦ＡＯ入試のパターンが今後ますます増えてきそうである。今年度新たにセンター利用の推薦入試を実施するのは、信州大学工学部，静岡大学理学部(生物)，三重大学人文学部，香川大学工学部，札幌医科大学保健医療学部、センター利用へ変更するのが埼玉大学理学部，新潟大学人文学部，富山大学人間発達科学部，県立広島大学人間文化学部や新設の新見公立大である。

出題問題の中から、昨年度の中四国の国公立大学のAO・推薦入試で実際に出題された数学の問題を取り上げてみる。

２　２００８年ＡＯ・推薦入試問題から

①（岡山大学理学部数学科　ＡＯ入試）

第１問

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$　　を証明せよ。

第２問

点 (0 , c) ($c>0$)を中心とする半径 r の円が放物線 $y=x^2$ に接するとき、次の問いに答えよ。

（１） c を r で表せ。

（２） r の値に応じて、接点の座標がどのように変わるか論ぜよ。

第３問

平面に N 個の点があり、どの２点も黒または赤のいずれかの色の線分で結ぶ。このとき、次の問いに答えよ。

（１） $N=5$の場合、どの３点も結ばれた線分が同じ色になっていないように結ぶことができる。そのような結び方のひとつを図示せよ。

（２） $N=6$の場合、どのように結んでも、結ばれた線分がすべて同じ色の３点が必ずあることを示せ。

第４問

数列 $\{a_n\}$ が条件

$$\sum_{k=1}^{n} e^{a_k}=n^2+2n\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たしているとする。次の問いに答えなさい。

（１） 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（２） 自然数$n\geqq1$に対して不等式

$$\frac{2n+1}{2}\log(2n+1)-n<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{2n+3}{2}\log(2n+3)-n$$

が成り立つことを示せ。

（３） 正数$p>0$に対して、数列$\{b_n\}$を

$$b_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^p\log n}\ \ (n=2,3,4,\cdots)$$

で定める。このとき、$\{b_n\}$が収束する p の範囲を定め、その極限値を求めよ。

②（岡山大学理学部物理学科　ＡＯ入試）

問

y が x の関数であるとする。今、x がごくわずか$\triangle x$ だけ変化し、$x+\triangle x$ となったとき、$y=f(x)$ の変化は $\triangle y=\triangle f=f(x+\triangle x)-f(x)$ と書ける。従って、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次のように定義される。

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{df}{dx}$$

（１） 次の多項式 $f(x+\triangle x)$ を$\triangle x$ のべき級数に展開せよ($\triangle x$ の２次まででよい)。その結果を用いて、上の微分の定義式により、関数$f(x)$の導関数を求めよ。

１） $f(x)=5x^2+6x+10$　　２） $f(x)=(x^2+x+1)^2$

（２） 次の数列の和を求めなさい。ただし、$|x|<1$ とする。

１） $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$　　２） $T=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$

上の２)でTを求めるのに、次の２つの方法を求めよ。

(a) T と xT の引き算により T を求める通常の方法

(b) S を x で微分することにより求める方法

③（広島大学教育学部科学文化教育系数理　ＡＯ入試）

第１問

次の問いに答えなさい。

(1)　3次式 $x^3+4x^2-27x+18$ を1次式の積に因数分解しなさい。

(2)　2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる2つの実数解 α,β をもつとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_\alpha^\beta (x^2+ax+b)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

第2問

n を自然数とするとき、次の問いに答えなさい。

(1)　数学的帰納法を用いて $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が正の実数のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$

(2)　数列 $\{s_n\}$ の一般項が

$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

であるとき、$\lim_{n\to\infty} s_n=\infty$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ の一般項が

$b_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}$

であるとき、$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ が成り立つことを示せ。

第3問

座標平面上で、原点 O 以外の各点 P に対して、O を中心として P を正の向きに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点を $P^\perp$ で表す。

そして、平面ベクトル $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ に対して、平面ベクトル $(\vec{v})^\perp$ を $(\vec{v})^\perp=\overrightarrow{OP}^\perp$ と定める。また、$(\vec{0})^\perp=\vec{0}$ と定める。

たとえば、$\vec{v}=(0,1)$ のとき、$(\vec{v})^\perp=(-1,0)$ である。

次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{v}=(r,s)$ ならば、$(\vec{v})^\perp=(-s,r)$ であることを示せ。

(2)　ベクトル $\vec{v},\vec{w}$ に対して、$(\vec{v}+\vec{w})^\perp=(\vec{v})^\perp+(\vec{w})^\perp$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\vec{v}=\overrightarrow{OP}, \vec{w}=\overrightarrow{OQ}$ であり、$\vec{v}\neq\vec{0}, \vec{w}\neq\vec{0}$ とする。原点 O を中心にして点 P を正の向きに角 θ だけ回転したとき、点 P が直線 OQ 上に移されるならば、内積 $(\vec{v})^\perp\cdot\vec{w}$ について次の等式が成り立つことを示せ。

$(\vec{v})^\perp\cdot\vec{w}=|\vec{v}||\vec{w}|\sin\theta$

④（島根大学総合理工学部数理系 推薦入試）

第1問　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $f(x)=|x|$ が $x=0$ で微分可能であるかどうか調べよ。

(2)　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で、かつ開区間 (a,b) で微分可能とする。$a<x<b$ で $f'(x)>0$ ならば、$f(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で増加であることを平均値の定理を利用して示せ。

第2問　次の三角関数の微分法に関する問いに答えよ。

ただし、θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

1.　座標平面の3点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,\tan\theta)$ をとり、O を中心とし半径1の円と線分 OB との交点を Q とする。中心角 θ の円弧 $\overparen{AQ}$ を n 等分し、その両端と分点を順に $P_0=A, P_1, \cdots, P_n=Q$ とし、それらを線分で結んで折れ線をつくる。次の問いに答えなさい。

(1) この折れ線の長さを L_n とするとき、L_n は線分 AB の長さより小さくなる。その理由を述べよ。

(2) 円弧 $\overparen{AQ}$ の長さは、n を限りなく大きくしたときの L_n の極限であると理解するとき、不等式 $\theta<\tan\theta$ が成り立つことを示せ。

2.　解答用紙に円弧の図をかき、不等式 $\sin\theta<\theta$ を証明せよ。

3.　極限 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ を求めよ。

4.　問3を利用して極限 $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}$ を求めよ。

5.　$\sin\theta$ の導関数が $\cos\theta$ になることを証明せよ。

⑤（島根大学総合理工学部情報系 推薦入試）

1.　4以上の自然数 n に対して、$3n+69\leqq 3^n$ を数学的帰納法を用いて表しなさい。

2.　円形の紙から扇形を切り取ってできる直円錐の体積を求めたい。切り取る扇形の中心角を x、扇形を切り取る円の半径を a とするとき、直円錐の体積はどのような式で表されるか述べよ。ただし、円周率は π とする。

3.　区間 $[a,b]$ で常に $f(x)>0$ のとき、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S を表す。S の値を近似的に求める手順について、以下の問 (a) ～ (d) に答えよ。

(a)　区間 $[a,b]$ の両端 $x=a, x=b$ との中点 $x=\frac{a+b}{2}$ における値 $y=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ と区間 $[a,b]$ の長さ $(b-a)$ の積 $M_1=(b-a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdots$① によって S の値を近似したとき、M_1 の値（面積）を解答用紙に図示しなさい。

(b)　区間 $[a,b]$ を2等分割し、分割した区間のそれぞれに式①を適用したときに、S を近似した値 M_2 を数式で表しかつ解答用紙に図示せよ。

(c)　次の積分 $S=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ について、M_1 と M_2 の値を求めよ。

(d)　一般に、区間 $[a,b]$ を n 等分割し、その分割数 n を増やしていくと、積分の値 S とそれを近似した値 M_n の差の絶対値 $|S-M_n|$ はどうなっていくと思うか。その理由とともに簡潔に説明せよ。ただし、n は正の整数とする。

３　２００８年推薦入試問題から（抜粋）

以下に推薦入試における教科面接の質問内容を紹介する。

- $y=\int_0^1(x^2+x)dx$ を計算しなさい。
- $y=x^2-1$ のグラフにおいて $x=3$ における接線の方程式を求めなさい。
- $y=\sin 2\theta$, $y=2\sin\theta$ のグラフをかきなさい。

（鳥取大・工・応用数理・推薦）

- $\tan(-405°)$ の値を求めなさい。
- $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ の極値を求めなさい。
- 不定積分 $\int\frac{\log x^2}{x}dx$ を求めなさい。
- 収束、発散、振動の意味を言いなさい。
- $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n^2-3}$ を求めよ。
- $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$ を求めよ。
- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$ と $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$ を求めなさい。
- ２つのベクトル $\vec{a}=(1,5)$, $\vec{b}=(2,-2)$ で、$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ とが直角になるための t の値を求めなさい。
- $a\sin\theta+b\cos\theta$ を合成しなさい。　　（岡山大・工・推薦）
- $(x^3+1)^3$ を微分しなさい。
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$ を計算しなさい。
- $\log_3(x-2)+\log_3(x-3)=3\log_{27}(x+1)$ を解きなさい。
- $\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}=a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ となる a,b,c,d の値を求めなさい
- $4\sin^2\theta-4\cos\theta+1$ （$0\leqq\theta<2\pi$）の最大値とそれを与える θ の値を求めなさい。

（山口大・工・電気電子・推薦）

- 次の無限等比級数の和を求めなさい。
  $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\cdots$
- 次の極限値を求めなさい。　$\frac{5^n-3^n}{2^n-5^n}$
- 媒介変数表示 $\begin{cases}x=5t\\ y=-t^2\end{cases}$ において、$\frac{dy}{dx}$ を t で表せ。
- 行列 $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$ で、点 $Q(x,y)$ が $(7,5)$ に移される Q を求めなさい
- ２つの関数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ について
  (1)　グラフの交点の x 座標を求めなさい。
  (2)　(1)で求めた点で囲まれた図形の面積を求めなさい。
- 2次方程式 $2x^2-4x+1=0$ について
  (1)　2つの解 α,β について、$\alpha+\beta,\alpha\beta$ の値を求めなさい。
  (2)　$(\alpha-1)(\beta-1)$ の値を求めなさい。
- 底面の円の半径と高さの和が 6 である円錐において、底面の半径を x としたときの体積 V を x で表しなさい。
- 2^{30} は何桁の整数か答えなさい。$\log_{10}2=0.3010$ とする。
- $y=x^x$ を微分しなさい。
- 行列 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ について、A^3-A^2+A を求めなさい。

（徳島大・工・電気電子，光応用工・推薦）

- $\sin\theta=\cos\theta$ $(0°\leqq\theta<360°)$ を解きなさい。
- $a=\log_2 3$ とする。
  (1)　1 と a の大小関係を答えなさい。
  (2)　2 と a の大小関係を答えなさい。
  (3)　1.5 と a の大小関係を答えなさい。
- $\log 2^{30}$ と $\log 5^{20}$ の大小関係を答えなさい。

（香川大・教育・学校教育教員養成課程数学領域・推薦）

真か偽かを答えなさい。

- Ａ君，Ｂ君，Ｃ君が、１回ジャンケンをして、Ａ君一人が勝つ 確率は $\frac{1}{3}$ である。
- $\triangle ABC$ で $\sin A=\cos B$, $\sin B=\cos A$ のとき、A と B は 45°である。
- $\int_{-a}^{a}\sin x\,dx=2\int_0^a\sin x\,dx$ である。
- AB が逆行列をもつとき、BA も逆行列をもつ。

（愛媛大・理・数学・推薦）

- $x^2+x+(k+1)x-k=0$ が k についての恒等式となるように x の値を求めなさい。
- $\log_2 256$ を求めなさい。 $\log_{256}2$ の値も求めなさい。
- $\sum_{k=1}^{n}$ を求めなさい。
- $\sum_{k=1}^{n}k^2$ を n の式で表すにはどのような式を考えればよいか。

（高知大・理・数学コース・推薦）

４　まとめ

国公立大学は2004年度の独立法人化以降、所在する地域との密接な連携を強化している。地方自治体にとって、教育や医療分野での人材不足が切迫した問題である。国公立大の医学系や教員養成系での「地元枠」「地域優遇型」の推薦入試が急速に導入され、教育では京都教育大の府内北部の高校出身者、医学では四国４大学全てで県内高校出身者対象の枠がある。将来、地元への貢献を義務付けた奨学金も用意してある。

また、文部科学省は今春の通達で、推薦合格者に対して入学までの「学習喚起」を義務づけた。「入学準備教育」として、九州工業大では数学と理科に特化した２泊３日の合宿研修を２回実施する。大学によって、基礎学力問題の添削指導、課題レポート、小論文の提出と指導、課題図書の提示と感想文の提出などを実施方法は様々であるが、今後はより一層、入学準備教育の実施と充実化が進むと思われる。

今後も国公立大では再編統合や、学部組織の大幅な改編、公立短大の４年制化が進むはずで、それらに伴う変化に十分留意する必要がある。時代と共に社会からそして地域から大学に求められるものは変化していく。その時代時代に大学から求められる学生像と高校生の個性とを見極めながら進路指導をしていく柔軟性がこれからの担任には問われていくであろう。