

大学入試研究委員会

本研究委員会は、6名の研究委員で構成されています。継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれ努力を続けてきました。本年度の研究一覧は以下の通りです。

大学入試センター試験に関するアンケートにつきましては、県下の受験生や先生方のご協力を頂き、本年度も集計・分析を終え報告するはこびとなりました。ありがとうございました。

先生方のご意見・ご指導を頂き、今後の研究活動に生かしていきたいと思っておりますので、よろしく申し上げます。

1 中四国の国立大学の入試問題について

－数学Aにおける確率から－

愛媛県立松山東高等学校 浦田 雄一

2 国公立大学入試問題の研究

－AO・推薦入試の問題から－

愛媛県立三島高等学校 五味 稔

3 平成21年度大学入試センター試験アンケートの分析

愛媛県立宇和島東高等学校 富田 裕昭

愛媛県立西条高等学校 真田 幸治

愛媛県立今治北高等学校 兵頭 道淳

4 平成21年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校 近藤 弘法

中四国の国立大学の入試問題について

－数学Aにおける確率から－

愛媛県立松山東高等学校 浦田 雄一

1 はじめに

確率は中学から高校へと、代数、幾何、代数幾何、解析と積み上げてきた数学の世界と異質なところがあり、多くの受験生にとって苦手な分野の一つになっている。それを克服するために大切なことは、「場合の数」を計算するとき、もれなく、かつ重複しないことである。また、効率的に数え上げるには、求められていることの性質、特徴に着目し、一定の法則を見つけ、その法則にのっとって計算することを体得することである。このことは数学に限らず日常生活においても基本的かつ重要なことである。

本校の生徒は、ほとんどが大学進学を希望していることもあり、今回も昨年に引き続き、平成21年度入試の中四国の国立大学の二次試験から生徒に確率の問題を解いてもらい、それらについて調べてみることにした。

2 確率に関する問題の出題状況

過去5年間に出题された平成17年度から21年度入試の出題状況を次ページの表にまとめてみた。中四国のすべての国立大学が出题しているわけではないが、明らかに中国地区の大学からの出題率が高く、四国地区の大学は出題率が低い傾向にある。中でも広島大学は毎年出題しており、良問で複数の問題が出題されている。

今回は、3つの問題と解答を紹介し、そのうちの2題を本校の生徒に解かせてみて、その分析を行ってみたい。

3 入試問題例

I 島根大学 前期（理系）

<問題>

A, Bの2人がそれぞれ袋の中に4個の玉を持っている。Aの玉には1から4までの数字が書かれている。Bの玉には2から5までの数字が書かれている。各自が玉を1個取り出して、より大きい数字の玉を出したものが勝ち、同じ数字の玉なら引き分けとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 2人が各自の袋から中を見ないで1個取り出すとき、Aが勝つ確率を求めよ。

(2) 4回の対戦を次のように行う。Aは袋の中を見て1, 2, 3, 4の順に玉を取り出し、Bは袋の中を見ないで1個ずつ取り出す。ただし、取り出した玉は袋に戻さないとする。このとき、Aがちょうど2勝する確率を求めよ。

(3) (2)のとき、Aがちょうど1勝する確率を求めよ。

<解答>

(1) A, Bが取り出す玉をそれぞれ a, b とすると、Aが勝つのは

$$(a, b) = (3, 2), (4, 2), (4, 3)$$

のときであるから、確率は

$$\frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}$$

平成 17 ～ 21 年度入試の中四国の国立大学入試問題状況（数学 A 確率関係から）

大学	年 度	文 系		理 系		数学科		医/歯/薬		備 考
		前期	後期	前期	後期	前期	後期	前期	後期	
鳥 取	17			○			□			□は数Bとの融合
	18			○	△			○		△：場合の数のみ
	19									
	20			○				○		
	21									
島 根	17			○	△	○				△：場
	18				△		△	○		△：期、△と○は数Ⅰの内容を含む
	19			○		○				期待値との融合問題
	20			□						期待値、数Ⅲとの融合問題
	21			○	△		△			△：期待値との融合問題
岡 山	17	○								○：場
	18									
	19		△	○				○		○：場、△：期
	20	△		○				○		△：期
	21			○						○：場合の数
広 島	17	△		○	□		☆	○		□と☆：数Ⅲとの融合、○は数Bとの融合
	18	○		△	□		☆	△		□と△：期、☆は数Ⅲ、Cとの融合
	19	△		○	□		☆	○		○と△：期、☆は数Ⅲ、Cとの融合
	20	△		○	□		☆	○		□：期、△：数B、○：期、数B、数Ⅲ
	21	○		△	□		☆	△		□、△、☆は期待値との融合問題
山 口	17	○		○			△			○、△とも場合の数の融合
	18	△		△		○		○		△：期、数Cとの融合
	19			○				○		
	20			○		○		○		
	21			○						期待値との融合問題
徳 島	17			○						場合の数のみ
	18									
	19									
	20							○		場合の数のみ
	21							△		数Ⅲとの融合問題
鳴門教育	17						○			中学校数学専修コース
	18									
	19									
	20					○				小(算数)、中(数学)コース
	21					○				小(算数)、中(数学)コース
愛 媛	17						○			集合の内容を含む
	18						○			場合の数
	19			○				○		○：期
	20	○		○△		△				○は教育・農学部、△：二項定理
	21			○	△					△：場合の数（小問）

(香川大学と高知大学は過去5年間出題なし)

<主な例> ○：場・・・○が場合の数の内容を含むことを表す。
 △：期・・・△が期待値の内容を含むことを表す。

- (2) Bが4回取り出す玉の数字を順に b_1, b_2, b_3, b_4 とする。どのような b_1, b_2 であっても A が1回目または2回目に勝つことはないので、A がちょうど2勝するのは A が3回目と4回目に勝つときである。したがって、 $(b_3, b_4) = (2, 3)$ のとき、 (b_1, b_2) は $(4, 5), (5, 4)$ の2通りある。よって、A がちょうど2勝する確率は

$$\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$$

- (3) A がちょうど1勝するのは3回目または4回目だけ A が勝つときである。したがって、 $(b_3, b_4) = (2, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)$ それぞれの (b_3, b_4) に対して (b_1, b_2) は2通りずつある。よって、A がちょうど1勝する確率は

$$\frac{7 \cdot 2}{4!} = \frac{7}{12}$$

II 岡山大学 前期 (理系)

<問題>

1から6までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき、単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として、次の問いに答えよ。

- (1) さいころを何回か振って、点 P の回転した角が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。
 (2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。 $P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。
 (3) さいころを2回振ったところ、1回目は4の目、2回目は3の目が出た。そのとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような、3回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。

<解答>

- (1) 1回振って $\frac{\pi}{2}$ になるのは、2の目が出る1通り。
 2回振って $\frac{\pi}{2}$ になるのは、 $(3, 6), (4, 4), (6, 3)$ の3通り。3回振って $\frac{\pi}{2}$ になるのは、 $(6, 6, 6)$ の1通りであるから、目の出方は
 $(2), (3, 6), (4, 4), (6, 3), (6, 6, 6)$
 (2) 3回振って角 π だけ移動するのは (1) より
 $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$
 であるから、 $P_4 = P_0$ となる目の組合せは

$(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 4), (1, 3, 3, 3), (2, 2, 2, 2)$ の5通りあり、それぞれの目の出方の順番を考慮して、求める場合の数は

$$1 + 4! + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} + 1 = 42 \quad (\text{通り})$$

- (3) $\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大 \Leftrightarrow 辺 P_1P_2 と点 P_3 の距離が最大

よって、図より3回目のさいころの目が1のとき最大となる。(図は省略)

III 山口大学 前期 (理系)

<問題>

A, B の2人が次のようなゲームをする。1枚の硬貨を何枚か投げて表が裏よりも先に3回出たら A の勝ち、反対に裏が表よりも3回出たら B の勝ちとし、ゲームを終了する。例えば、1回目に表、2回目に裏、3回目に表、4回目に表が出た場合には A の勝ちである。ゲーム終了時に、得点として勝った者には1点を、負けた者には x 点を与えることにする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 1回目に表が出たとする。このとき、A が勝つ確率を求めなさい。
 (2) $x = -0.5$ とし、1回目に表が出たとする。このとき、A の得点の期待値を求めなさい。
 (3) 1回目に表が出たとする。このとき、A の得点の期待値が0点となるように x の値を定めなさい。

<解答>

表が出ることと、裏が出ることはどちらも $\frac{1}{2}$ である。

- (1) 1回目に表が出たとき、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + {}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

- (2) (1) より、求める期待値 E は

$$E = 1 \times \frac{11}{16} + (-0.5) \times \left(1 - \frac{11}{16}\right) = \frac{17}{32}$$

- (3) (2) と同様に、 $E = 0$ として

$$1 \times \frac{11}{16} + x \times \left(1 - \frac{11}{16}\right) = 0 \quad \text{と表される。}$$

$$\text{よって、} x = -\frac{11}{5} = -2.2$$

4 入試問題の分析および考察

問題 I (対象生徒：2年生 理系 40名、設定時間 20分)

<正誤人数>

	(1)	(2)	(3)
正答	37	29	12
誤答	3	11	26
無答	0	0	2

<主な誤答例>

- (1) ・引き分けを勝ちに含んでいる。(1名)
 ・Aの3, 4から1つ, Bの2, 3から1つ取り出すという考えから分子を ${}_2C_1 \times {}_2C_1$ としている。(1名)
 ・すべての場合の数を $4! \times 2$ としている。(1名)
- (2) ・3回目が(A, B) = (3, 2)、4回目が(A, B) = (4, 2)とBの2が重複している。(6名)
 ・樹形図が、途中で終わっている。(1名)
 ・Aが勝つのが1通りしか見つかっていない。(1名)
 ${}_4C_2 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{128}$ としている。(1名)
 ${}_3C_1 \left(\frac{3}{16} \right) \left(\frac{13}{16} \right)^2 \times \frac{3}{16}$ としている。(1名)
 $\frac{2!}{{}_4C_2} \times \frac{1}{{}_2C_1} \times 1 = \frac{1}{6}$ としている。(1名)
- (3) $\frac{2}{24} + \frac{4}{24} = \frac{1}{4}$ としている。(4名)
 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ としている。(4名)
 $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ としている。(3名)
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ としている。(2名)

<考察>

- (1) ・正答者37名中、樹形図や辞書式を利用している生徒が29名(約78%)であった。
 ・この問題はすべての場合の数を列挙しても24通りであるから、式を立てるよりも樹形図や辞書式を利用した方がミスを防げたと思う。
- (2) ・誤答者の中では $\frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$ という解答が4名と最も多かった。
 ・正答者29名の内訳は $\frac{2}{4!}$ が19名(約66%)、 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4}$ が6名(約20%)、 $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} \times \frac{1}{2}$ が2名、 $\frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ が2名(約7%)であった。
- (3) ・様々な誤答例が出たことから、場合分けの力を試される問題であったと思う。
 ・樹形図などを利用するなど、基本である数え上げの原理の大切さを痛感した。

問題Ⅲ (対象生徒: 2年生 理系 40名, 設定時間 20分)

<正誤人数>

	(1)	(2)	(3)
正答	18	17	14
誤答	22	23	24
無答	0	0	2

<主な誤答例>

- (1) ・樹形図などを利用したが、不足して $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ と答えて

いる。(12名)

・樹形図などを利用したが、不足して $\frac{5}{8}$ と答えている。(3名)

・樹形図などを利用したが、不足して $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ と答えている。(1名)

いる。(1名)

・ ${}_4C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$ と答えている。(2名)

・「1回目にAが勝っている」という条件が使えていない。(2名)

・1回目表の後、 ${}_3C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)$ として、表裏裏の場合を含んでしまっている。(1名)

・ ${}_4P_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$ としている。(1名)

(2) ・(1)で間違えたため。(17名)

・Aが1回勝つごとに1点すなわちAが勝利したとき3点と解釈して解いている。(2名)

・「1回目にAが勝っている」という条件が使えていない。(1名)

(3) ・(1)で間違えたため。(22名)

・答に- (マイナス) が付いていないケアレミス。(1名)

<考察>

- (1) ・同様に確からしいかどうかの認識不足が16名であった。場合分けはできているがそれらが同様に確からしいかの確認(チェック)をするまでには至っていない。
 ・正答している生徒の中で、数式からが13名、樹形図利用からが4名、Bの勝つ確率を求めて余事象利用からが1名であった。
- (2) ・(1)を間違えた影響による誤答者17名中13名(約76%)は余事象の考え方でBが勝つ確率を求めており、さらに期待値の定義式も正しく使っていた。
 ・正答者17名中、Bが勝つ確率を余事象の考え方を使わずに求めた者が2名いた。
- (3) ・(2)と(3)の問題は期待値の定義式を理解しているならば(1)が正解した人へのサービス問題である。
 ・逆に言えば、問題を正しく理解できなかつたり、樹形図などに過不足があつて(1)で間違えた受験生にとっては致命的な影響があつたと思われる。
 ・(1)の誤答率(約55%)には驚かされた。これだけの数値が出ると言うことは受験生にとってケアレミスの代表的な例であると言える。授業等でこの誤答を解答例の1つとして提示し、どこがどう間違っているのかを生徒に発表させるような工夫も必要だと思う。

5 おわりに

確率問題の解法は、樹形図や辞書式による数え上げの原理(原則)が基本となるが、大学入試問題にもなると“もれなく”かつ“重複なく”効率的に数え上げることが必要となつてく

る。そのためには、性質や特徴に着目し、一定の法則を見つけ式を立てる能力を養うことが必要となってくる。数多くの問題を解く経験から一般的な手順や解法を習得させることが

大切である。確率の指導のポイントとして、

- (1) 事象と確率では、集合に関する種々の内容の理解
- (2) 確率の基本性質では、加法定理や和事象の理解
- (3) 独立試行の確率では、直感的な解釈
- (4) 反復試行の確率では、具体的な問題を扱う中での慣れ
- (5) 期待値では、概念の把握

が挙げられる。

また、確率の最大値、最小値問題では、平方完成による解法もあるが、

(ア) $P(k+1) - P(k)$ と 0 との大小

(イ) $\frac{P(k+1)}{P(k)}$ と 1 との大小

の解法はとても重要である。

入試問題の形式も定理を証明させるなど多様化している。

ここで、鳴門教育大学からユニークな問題が出題されていたので紹介したい。

鳴門教育大学 前期

(小・中学校教育＝算数・数学科教育コース)

<問題>

下の問題について(1),(2)に答えなさい。

から までの数字を1つずつ書いた

枚のカードの中から2枚のカードを同時に取り

出す。このとき、その2枚のカードの数の であ

る確率を求めなさい。

- (1) には10より大きい自然数を,
, には3桁の自然数を,
 には適切な文を入れて、確率の加法定理を用いる問題となるように問題文を完成させなさい。
- (2) 完成させた問題を確率の加法定理を用いて解きなさい。

<解答例>

ア…11 イ…110 ウ…100

エ…和が23または25

上の問題では、確率の加法定理 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ について問われている。これを、和事象の確率

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ と間違えた生徒もいたのではないだろうか。自分自身で、指定された条件のもと、問題を作って解くという今までにないパターンであった。生徒の学力レベルを知ることでもできると思う。

確率は、方程式の解を求めたときのように検算方法が少ないため、発想の段階がとても大切であることに注意し、指導しな

ければならない。特に、反復試行や独立試行の応用問題をはじめとする代表的な問題を取り扱い、問題に慣れる必要がある。

以上のような点を再確認し、今後の指導に役立てていきたい。

*参考文献:

平成21年度 国立大学 全国大学 数学入試問題詳解

(聖文新社)