

平成22年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校

近藤 弘法

1 はじめに

5月15日（土）に松山南高等学校において、愛媛大学の平野教授より平成22年度の愛媛大学数学入試問題の解説があった。各問題において、基本的事項の確認、基礎・基本の計算力、応用力、論理的な思考力・表現力に重点を置いて、評価をしているとのことであった。正しい推論ができているかどうか、適切に処理できているかがポイントであり、公式を書いて部分点をねらう解答は、あまり評価できないようである。それでは、どこでどのような間違いが生じてくるのか、現役生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

2 出題の傾向

(1) 出題傾向

教育・農については例年通り全問記述4題を100分、理・工・医については今年度も全問記述5題を120分で解答する。一昨年度より実施されている工学部後期については全問記述4題を100分で解答する。

教育・農学部	1～4 (I・II・A・B)
理・工学部	4～8 (I・II・III・A・B・C)
医学部	4, 6～9 (I・II・III・A・B・C)
工学部後期	1～4 (I・II・III・A・B・C)

(2) 出題内容

1 小問5問	5 小問5問
2 図形と方程式	6 数列
3 微・積分法	7 行列
4 確率	8 微・積分法
	9 整数問題

工学部後期

1 小問5問
2 小問5問
3 行列
4 微・積分法

(3) 難易度

昨年度までと同様大きな変化はない。基本～標準レベルの問題を中心に出题されている。小問5問は教科書レベルの基本問題であり、非常に解きやすい。基礎力を重視した問題構成であるといえる。

3 平成22年度入試問題の分析

(1) 本校の現3年生に入試問題を解いてもらう。

3年生の文系生徒に1～4を8月に、理系生徒に4～8、理数科生徒に工学部後期1～4を11月に解かせた。採点基準は公表されていない。そのため、定期考査と同様に採点基準を設けて採点し、調査を行った。

(2) 問題分析

1] 次の問いに答えよ。

(1) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

(2) 鈍角三角形ABCを求めよ。において、 $BC=1$, $CA=\sqrt{3}$, $\angle A=30^\circ$ であるとき、ABの長さを求めよ。

(3) 原点O, および3点A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)がある。 $0 < s < 1$ に対して、線分AB, 線分CAをs:(1-s)に内分する点をそれぞれP, Qとすると、内積 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ をsを用いて表せ。

(4) 方程式 $\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \frac{1}{x}\right)^2 = 9$ を解け。

(5) 数列1, a, b, cはこの順に等差数列であり、数列1, a, b, cはこの順に等比数列であるとする。このとき、 $c=1$ であることを示せ。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
得点率(%)	81.4	51.9	35.2	24.8	14.3	41.5
標準偏差	1.1	2.2	2.3	1.5	1.1	3.5

≪誤答例≫

(1) 計算が間違っている。

不等号の書き間違い

(2) ABの値を2つ求めて、吟味していない。

正弦定理を利用しているが、 $\angle B$ が1つに限定できていない。

《考察》

(、) こちらも全問正解者はいなかった。(2)の時点で間違えている生徒が多く、その後の問題につながらなかったようである。(4)については誰も解答できていないところが気になる点である。

計算ができていない。

結論に至っていない。

《考察》

全問正解者はいなかった。正確に基本問題を解ききれる生徒が少なかったように感じている。特に(5)の得点率が低いことから、数列の基本的な内容が定着していないようである。

② 直線 $y = a(x + 2)$ と円 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ は異なる2点P, Qで交わっているとす。また、線分PQの中点をRとする。

- (1) 定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) R の座標を a を用いて表せ。
- (3) 原点O と点R の距離を求めよ。
- (4) a の値が(1)で求めた範囲を動くとき、点R の軌跡を求めよ。

	(1)	(2)	(3)	(4)	計
得点率(%)	71.1	11.9	1.8	0.0	26.4
標準偏差	2.2	2.1	0.5	0.0	3.6

《誤答例》

- (1) 点(2, 0) と直線の距離ができていない。
 $d < r$ は書いているが、計算が間違っている。
判別式が間違っている。
- (2) 代入して計算しようとして、計算できずに終わっている。
解と係数の関係を用いているが、途中で終わっている。
立式はできているが、計算が間違っている。
- (3) 計算が間違っている。

③ $f(x) = x^2 - 2|x| - 1$ とする。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3x + 5$ の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3x + 5$ で囲まれた面積を求めよ。

	(1)	(2)	(3)	計
得点率(%)	69.7	77.6	60.1	69.8
標準偏差	2.2	2.7	3.1	6.5

《誤答例》

- (1) グラフを決定するための点の記入が不十分である。
場合分けができていない。
 $x > 0, x < 0$ の場合分けはされているが、
 $x = 0$ が含まれていない。
- (2) 場合分けができていない。
計算が間違っている。
- (3) 立式ができていない。
立式はできているが、計算が間違っている。

《考察》

全問正解者が16%であった。最も得点をとれた大問であった。ただし、計算ミスや絶対値の場合分けが不十分な解答もあった。

④ 4の数字が書かれたカードが1枚、3の数字が書かれたカードが1枚、2の数字が書かれたカードが2枚、1の数字が書かれたカードが2枚、0の数字が書かれたカードが4枚ある。これら合計10枚のカードをよくまぜて、左から右に一列に並べる。

- (1) 左から4番目までの4枚のカードに書かれた数がすべて0となる確率を求めよ。
- (2) 右から1番目のカードに書かれた数の期待値を求めよ。
- (3) 左から3番目までの3枚のカードに書かれた3つの数について、次の条件①, ②を考える。
① 3つの数が全て異なる。
② 3つの数の中で、左から1番目のカードに書かれた数 a が最大である。
条件①, ②の両方が同時にみたされた場合の得点を a とし、それ以外の場合の得点を0点とする。
(i) 得点が4点となる確率を求めよ。
(ii) 得点の期待値を求めよ。

	(1)	(2)	(3)(i)	(3)(ii)	計
文系得点率(%)	46.8	58.5	1.6	0.0	22.6
文系標準偏差	1.3	2.9	1.0	0.0	3.7
理系得点率(%)	63.4	76.2	27.9	5.8	35.8
理系標準偏差	1.9	1.7	1.6	1.7	5.0

◀誤答例▶

文系

- (1) 問題の意味がうまくつかめていない。
計算が間違っている。
- (2) 全ての場合を書き出しているが、それぞれの計算が間違っている。
立式ができていない。
無答

- (3)(i) 左から3つの数のみを考えている。
3つの数が全て異なる確率を求めている。
- (ii) 左から3つの数のみを考えている。

理系

- (1) 約分ができていない。
問題の意味がうまくつかめていない。
計算が間違っている。
- (2) 全ての場合を書き出しているが、それぞれの計算が間違っている。
計算が間違っている。
- (3)(i) 問題の意味がうまくつかめていない。
左から2番目と3番目の組み合わせが間違っている。
- (ii) 計算が間違っている。
左から3つの数のみを考えている。
1度使った数を重複して使っている。

◀考察▶

文理共通問題である。文系については全問正解者はいなかったが、理系については5%という結果になった。やはり、うまく文章を読み切れていない生徒が多く、整理して問題文を読む力と正しく処理する力が十分に身に付いていないようである。

[5] 次の問いに答えよ。

- (1) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

- (2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ と $x \leq y$ の両方をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

- (3) 方程式 $\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \frac{1}{x}\right)^2 = 9$ を解け。

- (4) 原点 O , および3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ がある。 $0 < s < 1$ に対して、線分 AB , 線分 CA を $s:(1-s)$ に内分する点をそれぞれ P, Q とするとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を s を用いて表せ。

- (5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+a)\cos 2x dx = \frac{\pi}{8}$ が成り立つとき、定数 a の値を求めよ。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
得点率(%)	95.3	68.6	73.8	57.6	68.6	72.8
標準偏差	0.7	1.5	1.0	1.8	1.8	5.4

◀誤答例▶

- (1) 計算が間違っている。
- (2) x, y の組に $(-6, 2)$ などの負の数が混じっている。
条件 $x \leq y$ を満たさない解を入れている。
- (3) 真数条件が明記されていない。
 $\log_2 x > 0$ として計算している。
- (4) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \{(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}\} \cdot \{s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OC}\}$ として計算し、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値が間違っている。
- (5) $\cos 2x$ を積分したときに $\frac{1}{2}$ が抜けている。

◀考察▶

全問正解者は9%という結果であった。文系同様、真数条件の確認やベクトルの内積のミスで満点を逃している解答が多かった。また、ベクトルが最も得点率が低いことも気になる点であった。

[6] 2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、全ての自然数 n について

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1-b_n^2}, b_{n+1} = a_{n+1}b_n$$

をみたしているとする。

(1) 初項が $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$ であるとする。

(i) a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。

(ii) a_n, b_n を表す n の式を推定し、それらの推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

(2) 初項が $a_1 = \frac{1}{2010}, b_1 = \frac{2009}{2010}$ であるとする。

(i) $a_{n+1} + b_{n+1}$ を a_n, b_n で表せ。

(ii) $a_n + b_n$ を求めよ。

	(1)(i)	(1)(ii)	(2)(i)	(2)(ii)	計
得点率(%)	100.0	68.1	55.0	6.6	54.1
標準偏差	0.0	2.7	1.5	1.1	4.8

<誤答例>

(1)(ii) a_n, b_n の推定ができていない。

a_n, b_n の推定はできているが、証明の際に推定をそのまま使っている。

(2)(i) 計算が間違っている。

(ii) $a_n + b_n$ の推定はできているが、証明ができていない。

<考察>

全問正解者は2%であった。推定から帰納法を使って証明を行うことになっていないようである。推定をそのまま使っている証明が目立った。推定が全ての自然数 n について成り立つかどうかを吟味する必要性を理解させることが重要である。

[7] 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ の表す点の移動を f とし、

l を直線 $y = 2x - 1$ とする。また、 f による l 上の点の像はすべて l 上にあり、 l 上のある点 P は f によって P 自身に移されるとする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) 次の条件①, ②, ③をすべてみたす直線 m の方程式を求めよ。

① m は P を通る。

② f による m 上の点の像はすべて m 上にある。

③ m は l と異なる。

	(1)	(2)	(3)	計
得点率(%)	27.9	31.6	13.3	21.5
標準偏差	2.2	2.3	2.9	6.6

<誤答例>

(1) 立式が正しくできていない。

点 P を (x, y) とにおいて、 x と y の関係がわかっていない。

(2) 無答

(3) 無答

<考察>

こちらも全問正解者は2%という結果になった。[6]と違うところは全体的に正確に処理できる生徒が少ないという点である。平均点も理系の問題の中では最も低かった。回転移動、1次変換については、再度見直す点である。

[8] n を自然数とし、 $f(x) = x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3}$ とする。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_1^n f(x) dx$ を求めよ。

(3) 不等式 $\sum_{k=1}^n f(k) < \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}}$ を証明せよ。

	(1)	(2)	(3)	計
得点率(%)	75.3	38.1	2.3	29.5
標準偏差	1.9	2.4	1.5	4.2

<誤答例>

(1) 微分が間違っている。

微分できているが、 $f'(x) = 0$ の方程式の解が間違っている。

極大値、極小値の計算が間違っている。

(2) 部分積分を用いて、計算がわからなくなっている。

不定積分をして終わっている。

(3) 中間値の定理を使って証明しようとしたが、途中で終わっている。

(左辺)-(右辺)で考えているが、証明になっていない。

<考察>

こちらも全問正解者は2%であった。(1)はおおむねできていたが、(3)の証明がやはりできていなかった。区分求積の考え方がよく理解できていない解答が目立った。また、定積分の計算にも不安が残る。

[9] n を自然数とし、集合 A, B を

$$A = \{a \mid a \text{ は条件(★)をみたす自然数}\}$$

$$B = \{a \mid a \text{ は条件(☆)をみたす自然数}\}$$

で定める。ただし、条件(★),(☆)は次で与えられるとする。

(★) 2次方程式 $x^2 - ax + 2^n = 0$ は異なる2つの実数解 α, β をもち、 $\alpha - \beta$ は整数である。

(☆) 2次方程式 $x^2 - ax + 2^n = 0$ は異なる2つの整数解 α, β をもつ。

(1) 2つの集合 A, B について、 $A = B$ が成り立つことを証明せよ。

(2) (i) $n = 1, 2$ のそれぞれの場合について、集合 A を、要素を書き並べて表せ。

(ii) 集合 A の要素のうち、最大の数を求めよ。

(iii) 集合 A のすべての要素の和を求めよ。

<工学部後期>

[1] 次の に適する数または式を、解答用紙の指定の所に記入せよ。

(1) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ が x についての恒等式となるような定数 a, b, c, d の組合せは1通りであり、1列に並べる並べ方は 通りである。

(2) 3個のさいころを同時に投げるとき、同じ目のさいころが2個以上ある確率は である。

(3) 自然数 n に対して、 a_n, b_n を $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ によって定める。このとき

$$\begin{cases} a_{n+1} = \text{ウ} a_n + \text{エ} b_n \\ b_{n+1} = \text{オ} a_n + \text{カ} b_n \end{cases}$$

が成り立つ。

ただし、, , , は定数である。

(4) $t > 1$ とする。 $|\vec{a}| = t, |\vec{b}| = 4, |2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$ であり、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ が

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を満たすとき、 $t = \text{キ}$ である。

(5) (i) $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \right) = \text{ク}$

(ii) $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\text{ケ}}$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)(i)	(5)(ii)	計
得点率(%)	45.0	66.3	28.3	51.3	60.0	45.0	45.6
標準偏差	2.5	2.0	2.6	2.0	1.8	1.4	7.8

<誤答例>

(1) $4!$ を計算している。

$1, -2, -1$ の3つの数の並べ方を計算している。

a, b, c, d が求まっていない。

(2) 全てのさいころの目が違う確率が間違っている。

(3) 式の持つ意味が分かっている。

$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3})$ で計算をやめている。

(4) $t > 1$ を見落としている。

(5)(i) $e^x \cdot e^{-x} = e^{-2x}$ としている。

微分と積分を間違えている。

(ii) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$ で終わっているため、

ケの答えに合わない。

(与式) $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ としている。

<考察>

全問正解者は15%であった。やはり、数列が最も得点率が低い結果となった。また、指数の計算が正しくできていない生徒もいたため、確認が必要である。

[2] 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = ||x+1| - |x-1||$ のグラフをかけ。

(2) $z^2 = i$ を満たす複素数 z のうち、実部が正であるものを求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(3) 不等式 $\sqrt{-x^2 + 10x} < 4$ を解け。

(4) $0 \leq a \leq \pi$ とし、連続な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して

$$e^{-x} \int_a^x e^t f(t) dt = \cos x + \frac{1}{2}$$

を満たすとする。このとき、 a の値および $f(x)$ を求めよ。

(5) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$ を求めよ。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
得点率(%)	72.0	29.0	51.0	19.0	41.0	42.4
標準偏差	2.0	2.1	1.9	1.5	2.0	6.5

<誤答例>

(1) 絶対値が正しくはずせていない。

(2) $z = a + bi$ とおけていない。

$z = a + bi$ とし z^2 を計算できているが、 $a > 0$ を満たしていない。

(3) $-x^2 + 10x \geq 0$ を考えられていない。

$-x^2 + 10x > 0$ として範囲を計算している。

(4) 両辺の微分が正確にできていない。

$x = a$ を代入すればよいことに気付いていない。

(5) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ はできているが、

$\int \cos 2x dx = \sin 2x$ となっている。

(6) $\left[\cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1$ となっている。

◀考察▶

全問正解者はいないものの、**1**より得点を取りやすい内容であった。(3)の平方根の中身について考えられていない解答が目立った。また、(4)については基本問題でもあるので、再度確認が必要である。

3 行列 $A = \begin{pmatrix} a^2-1 & 2(a-1) \\ 3(a-1) & 6 \end{pmatrix}$ に対して、2次の正方行列 B は

$$AB = BA, ABA = A, BAB = B$$

を満たしている。

(1) A は逆行列をもたないとする。

(i) a の値を求めよ。

(ii) B を求めよ。

(2) A が逆行列をもつとき、 B を求めよ。

	(1)(i)	(1)(ii)	(2)	計
得点率(%)	80.0	50.0	21.1	43.2
標準偏差	1.2	6.2	2.8	9.0

◀誤答例▶

(1)(i) 行列式 $6(a^2-1) - 2(a-1) \cdot 3(a-1) \neq 0$ としている。

(ii) 逆行列が存在しないという前提条件を忘れている。

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ として、行列の積は計算できているが、処理できていない。

(2) 条件から $B = A^{-1}$ は分かっているが、正しく計算できていない。

$AB = BA = E$ から $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ として、処理できていない。

◀考察▶

全問正解者は10%であった。(1)は完答している生徒が多いものの、

(2)で逆行列の式をうまく求められていない解答や逆行列の公式自体を間違えて覚えている解答が多かった。

4 a, b を定数とし、 $x > 0$ において

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n + a \log x + b}{x^n + x} \text{ とおく。}$$

(1) 次の(i), (ii), (iii)のそれぞれの場合において、 $f(x)$ を求めよ。

(i) $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$

(iii) $x > 1$

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 0$ において連続であるとき、 b の値を求めよ。

(3) b を(2)で求めた値とする。

(i) $f(x)$ が $x = \frac{1}{e}$ で最大となるとき、 a の値を求めよ。

(ii) $f(x)$ が $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = e$ を満たすとき、 a の値を求めよ。

	(1)	(2)	(3)(i)	(3)(ii)	計
得点率(%)	77.9	62.5	31.4	20.7	46.4
標準偏差	2.6	1.9	3.2	2.8	8.2

◀誤答例▶

(1) 無答

(2) 無答

(3)(i) $f\left(\frac{1}{e}\right)$ を計算して終わっている。

微分が間違っている。

(ii) $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{a \log x + 2}{x} dx + \int_1^e 2 dx$ の計算が

できていない。

◀考察▶

全問正解者は**1**と同様、15%ではあったが、最も得点率が高い結果となった。最後まで取り組みやすい問題であったと考えられる。

4 おわりに

今年度の出題は基本～標準レベルの良問であった。

誤答分析から、基本内容の定着と読解力が身に付いていない生徒が多いということが分かった。どの大問を見ても、必ず基本事項の確認問題が用意されている。その問題をいかに正確に早く解くかが完答するポイントであろう。

特にの小問5題については確実に点を取りたい問題ではあるが、広範囲から出題されているため、基本的な内容が身に付いていない生徒は点を落としている。

また、確率については問題文が正確に読み切れず、立式ができていない生徒が多かった。読解力を上げるトレーニングも必要である。

説明会の時に平野教授が思考力を表現することが大事であると言われていた。正しい推論が解答の中でなされているかどうかを見たいとのことであった。自分の考えを適切に表現する力を身に付けさせることが、今後の指導において重要なことであると感じている。今回の研究で学んだことを、普段の授業や定期考査等の中でも指導していかなければならない。