

大学入試研究委員会

本研究委員会は、6名の研究委員で構成されています。継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれ努力を続けてきました。本年度の研究一覧は以下のとおりです。

大学入試センター試験に関するアンケートにつきましては、県下の受験生や先生方の御協力をいただき、本年度も集計・分析を終え報告する運びとなりました。ありがとうございました。

先生方の御意見・御指導をいただき、今後の研究活動に生かしていきたいと思っておりますので、よろしくお願いいたします。

1 国公立大学の数学Ⅲの入試問題について

ー平均値の定理を用いた問題からー

愛媛県立新居浜西高等学校 松田 智也

2 国公立大学入試問題の研究

ーAO・推薦入試の問題からー

愛媛県立三島高等学校 五味 稔

3 平成22年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校 近藤 弘法

4 平成22年度大学入試センター試験アンケートの分析

愛媛県立松山東高等学校 浦田 雄一

愛媛県立西条高等学校 真田 幸治

愛媛県立今治北高等学校 兵頭 道淳

国公立大学の数学Ⅲの入試問題について

ー平均値の定理を用いた問題からー

愛媛県立新居浜西高等学校 松田 智也

1 はじめに

数学Ⅲの学習内容は理系の生徒にとっては主要な受験科目であり、大学数学を学ぶために通らなければならない関門の一つである。その中で、平均値の定理を用いた受験問題に着目してみた。受験問題で扱われる頻度が少ないため守備範囲の狭い受験生にとっては難問になるようである。

平均値の定理

閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ について

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。

平均値の定理の1つの一般化にテイラーの定理がある。

テイラーの定理

n を自然数とする。区間 $[a, x]$ で n 回微分可能な実数値関数 $f(x)$ について、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

によって $R_n(x)$ を定義するとき、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となる c が区間 (a, x) において存在する。

この定理は大学数学における微分積分の基礎講座で必ず学習する。テイラーの定理において、 $n=1$ 、 $x=b$ とすれば平均値の定理になる。よって、平均値の定理は大学数学を学ぶにあたって非常に重要な公式といえる。今回は、その出題傾向を調べた。

2 出題傾向

過去5年間の解答に平均値の定理を用いる問題を出題した国公立大学をここに挙げる。

2010年

滋賀医科大学 (前期)

山口大学 (理 (数理学), 医・医, 前期)

2009年

滋賀医科大学 (前期)

神戸大学 (理系, 前期)

愛媛大学 (医・医, 前期)

2008年

大分大学 (医・医, 前期)

横浜市立大学 (医・医, 前期)

2007年

岐阜大学 (理系, 前期)

2006年

山梨大学 (医・医, 後期)

富山大学 (理 (数学), 前期)

防衛医科大学校

このように、平均値の定理を用いて解く問題は少なく、毎年3校程度が出題するにとどまっている。それ以前にさかのぼっても傾向は変わらない。学部は、医学部や理学部数学科を中心に出题される傾向があり、内容のほとんどは不等式の証明である。中には「平均値の定理を用いて」という言葉を入れている大学もあった。2005年には東京大学が出題したので、難関校、医学部、理学部数学科を希望する受験生はぜひ押さえておきたい公式であろう。

3 入試問題例

出題のパターンは大きく分けて3つである。

- ① $f'(c)=0$ となる c の存在と一意性 (ロールの定理)
- ② 単に不等式の証明
- ③ 数列の極限を求めるために必要な不等式の証明

いずれも共通して言えることは2階導関数 ($f''(x)$) の符号がはっきりしている問題が多いことである。①, ②は1問ずつ, ③の問題は興味深いので数問挙げてみる。

I 2009年 神戸大学 (理系, 前期)

問題

a, b は実数で $a > b > 0$ とする。区間 $0 \leq x \leq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b$$

ただし、 \log は自然対数を表す。このとき、以下のことを示せ。

- (1) $0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ。
- (2) $f'(c) = 0$ を満たす実数 c が、 $0 < c < 1$ の範囲にただ1つ存在する。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x に対して、 $ax + b(1-x) \geq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

解答 (2)のみ

(2) 関数 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で連続で、 $0 < x < 1$ で微分可能であるから、平均値の定理により

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c), \quad 0 < c < 1$$

を満たす実数 c が存在する。

ここで、 $f(1) = f(0) = 0$ であるから $f'(c) = 0$

よって、 $f'(c) = 0$ を満たす c が $0 < c < 1$ の範囲に少なくとも1つ存在する。

また、(1) より $0 < x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ であるから、 $f'(x)$ は単調に減少する。

したがって、 $f'(c) = 0$ を満たす実数 c が $0 < c < 1$ の範囲にただ1つ存在する。 (終)

この問題の解答は区間 $[0, 1]$ において、平均値の定理を用いて、 $f(0) = f(1)$ となることから定数 c の存在性を示し $f'(x)$ の単調性から c の一意性を示している。この問題は、ロールの定理を知っていると c の存在性はすぐに確認できる。平均値の定理とあわせて覚えたい公式であろう。同様の問題が2008年の横浜市立大学でも出題されている。

問題

関数 $y=f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ の値が常に正とする. このとき, 実数 a, b, t ($a < b, 0 \leq t \leq 1$) について, 不等式

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは, どのような場合か.

解答

$0 < t < 1$ のとき, 平均値の定理により

$$\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{(1-t)a+tb - a} = f'(c_1)$$

すなわち $\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{t(b-a)} = f'(c_1) \dots\dots ①$

(ただし $a < c_1 < (1-t)a+tb$)

を満たす c_1 と,

$$\frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{b - \{(1-t)a+tb\}} = f'(c_2)$$

すなわち $\frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)} = f'(c_2) \dots\dots ②$

(ただし $(1-t)a+tb < c_2 < b$)

を満たす c_2 が存在する.

仮定により, $f'(x)$ は単調に増加する.

$$c_1 < c_2 \text{ であるから } f'(c_1) < f'(c_2)$$

ゆえに, ①, ② から

$$\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{t(b-a)} < \frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

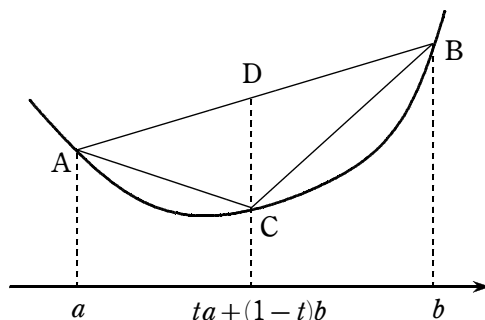
よって $f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$

また, $t=0, t=1$ のとき, 等号が成り立つことは明らかである.

したがって, 与えられた不等式は成り立つ. **終**

この解答は, 2 区間 $[a, (1-t)a+tb]$, $[(1-t)a+tb, b]$ においてそれぞれ平均値の定理を用いて, 条件 $f''(x) > 0$ より $f'(x)$ の単調性を利用して不等式を証明している. 2 つの区間に分けて考える発想は, 不等式を見ればある程度予測可能であるが, 生徒たちにとっては難問である.

そこで, この問題を図形的に考えてみる.



まず, 条件 $f''(x) > 0$ より $y=f(x)$ のグラフは下に凸である. $(1-t)a+tb$ は区間 $[a, b]$ を $t:(1-t)$ に内分する点である. 点 A, B, C のそれぞれの座標は, $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C((1-t)a+tb, f((1-t)a+tb))$ である. 点 D は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点であると考えられるから,

$$D((1-t)a+tb, (1-t)f(a) + tf(b))$$

となることが分かる. したがって, 下に凸なグラフでは必ず点 D が点 C の上側にあり,

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

となることがグラフを見ればよく分かる. このように不等式の幾何学的な意味を示しておくとし徒は実感することができ, 理解も少しは深まるのではないかと思われる. ちなみに, この不等式は専門書では凸関数の定義として紹介されていることがある.

不等式の証明のみの問題は, 2010年滋賀医科大学, 2009年滋賀医科大学, 2007年岐阜大学などが出題している.

Ⅲ 2008年 大分大学 (医・医, 前期)

問題

$f(x)=2^{\frac{x}{2}}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1, a_{n+1}=f(a_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

によって定める.

- (1) $a_n < a_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$
- (2) $a_n < 2 \quad (n=1, 2, \dots)$
- (3) $f(x)=x$ をみたす x を求めよ.
- (4) $f(\alpha)=\alpha$ のとき

$$\alpha - a_{n+1} < \frac{\alpha \log 2}{2} (\alpha - a_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

が成り立つことを示せ.

- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

解答 (3), (4) のみ

- (3) $x=2, 4$ (詳細は省く)

- (4) (2), (3) より $a_n < 2 \leq \alpha$ だから, 平均値の定理より

$$\frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} = f'(c) \quad (a_n < c < \alpha)$$

をみたす c が存在する. $f(\alpha)=\alpha, f(a_n)=a_{n+1}$ だから

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} &= f'(c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{c}{2}} \log 2 \\ &< \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}} \log 2 \quad (\because c < \alpha \text{ より}) \end{aligned}$$

が成り立つ. また, $2^{\frac{\alpha}{2}} = \alpha, \alpha - a_n > 0$ より

$$\alpha - a_{n+1} < \frac{\alpha \log 2}{2} (\alpha - a_n) \quad \text{終}$$

この問題は漸化式から特性方程式の解を求め, それを利用して極限を求めるための不等式を誘導し, 極限を求めさせる問題である. その不等式の証明に平均値の定理が必要

なのである. $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{x}{2}} \log 2$ が増加関数であるため,

$f''(x)$ の条件は無くてもよい. あとは特性方程式の解 α と $a_n < \alpha$ の2条件が加わって, 不等式を導くことができる.

Ⅳ 2010年 山口大学

(理 (数理科学), 医・医, 前期)

問題

次の初項と漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = e^{-a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ここで, e は自然対数の底で, $1 < e < 3$ である. 次の問いに答えなさい.

- (1) すべての自然数 n について $\frac{1}{3} < a_n < 1$ が成り立つことを示しなさい.
- (2) 方程式 $x = e^{-x}$ はただ1つの実数解をもつことと, その解は $\frac{1}{3}$ と1の間にあることを示しなさい.
- (3) 関数 $f(x) = e^{-x}$ に平均値の定理を用いることによって次の不等式が成り立つことを示しなさい.

$\frac{1}{3}$ と1との間の任意の実数 x_1, x_2 について,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq e^{-\frac{1}{3}} |x_2 - x_1|$$

- (4) 数列 $\{a_n\}$ は, 方程式 $x = e^{-x}$ の実数解に収束することを示しなさい.

解答 (3) のみ

- (3) $x_1 \neq x_2$ のとき, 平均値の定理から,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

つまり $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \dots\dots ①$

となる c が x_1 と x_2 の間に存在する. x_1, x_2 は $\frac{1}{3}$ と1の間にあるので,

$$\frac{1}{3} < c < 1 \quad \dots\dots ②$$

である. また, $x_1 = x_2$ のときは $c = x_1 = x_2$ とすると①, ②は成り立つので, いずれの場合も①, ②をみたす c が存在する. よって, ①の両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f'(c)| |x_2 - x_1| \\ &= e^{-c} |x_2 - x_1| \\ &\leq e^{-\frac{1}{3}} |x_2 - x_1| \quad (\because ②より) \end{aligned}$$

が成り立つ. 終

この問題は特性方程式の解 α が具体的に求まらないのである。ただ、存在範囲と一意性が確認できる。また、 a_n の値の範囲は誘導されているだけで、 α との大小関係が分からないので困ったように見える。しかし、絶対値の性質をうまく利用すれば α と a_n の大小関係がはっきりしていなくても不等式を導くことができる。一応、 $f'(x) = -e^{-x}$ は増加関数であるので、 $f''(x)$ の条件は無くてもよいことも確認しておきたい。

V 2009年 愛媛大学 (医・医, 前期)

問題

関数 $f(x)$ は第2次導関数を持ち、条件

- (A) $f(0) > 0, f(1) = 1$
- (B) $f'(0) > 0, 0 < f'(1) < 1$
- (C) すべての実数 x に対して $f''(x) > 0$

をすべて満たすものとする。また、数列 $\{x_n\}$ を帰納的に

$$x_1 = 0, x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(1) $0 \leq x < 1$ のとき

$$f(0) \leq f(x) < 1, f'(0) \leq f'(x) < f'(1)$$

であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して $0 < 1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$

が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ であることを示せ。

解答 (2) のみ

(2) まず、すべての自然数 n に対して $0 \leq x_n < 1$ ……①

が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n = 1$ のとき $x_1 = 0$ であるから、①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき①が成り立つ、

すなわち $0 \leq x_k < 1$ ……②と仮定する。

$n = k + 1$ のとき $x_{k+1} = f(x_k)$ であり、②と(1)から

$$f(0) \leq f(x_k) < 1$$

$$f(0) > 0 \text{ であるから } 0 < x_{k+1} < 1$$

よって、 $n = k + 1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2]により、①はすべての自然数 n について成り立つ。

ここで、 $f(x)$ は第2次導関数をもつことから、

$0 \leq x \leq 1$ で連続で、 $0 < x < 1$ で微分可能である。

$0 \leq x_n < 1$ であるから、平均値の定理により

$$\frac{f(1) - f(x_n)}{1 - x_n} = f'(c), \quad x_n < c < 1$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)$ は単調に増加し、 $c < 1$ であるから

$$f'(c) < f'(1)$$

ゆえに $\frac{f(1) - f(x_n)}{1 - x_n} < f'(1)$

$1 - x_n > 0$ であるから $f(1) - f(x_n) < f'(1)(1 - x_n)$

$f(1) = 1, f(x_n) = x_{n+1}$ であるから

$$1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

また、 $0 \leq x_{n+1} < 1$ であるから $1 - x_{n+1} > 0$

したがって、すべての自然数 n に対して

$$0 < 1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

が成り立つ。 **終**

この問題は条件(A)によって特性方程式の解 $\alpha = 1$ が示されているのに気づくべきである。 $f'(0) \leq f'(x) < f'(1)$ は $0 \leq x < 1$ のおいてのみ保証されているので、 $0 \leq x_n < 1$ を確認する必要がある。それによって平均値の定理から不等式を導くことができる。 $f(x)$ の具体的な関数は与えられていないが、①特性方程式の解 α 、② $f'(x)$ の単調性 (または範囲)、③②の条件が保証される x_n の範囲あれば極限を求めるための不等式を導くことができるのである。

VI 2005年 東京大学 (理系, 前期)

問題

関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $x > \frac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とすると、数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ によって定める。 } x_0 > \frac{1}{2} \text{ であれば、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \text{ であることを示せ。}$$

解答 (2) のみ

(2) [1] $x_0 = 1$ のとき

$$f(1) = 1 \text{ であるから } x_n = 1$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

[2] $\frac{1}{2} < x_0 < 1, 1 < x_0$ のとき

(1) から, $x > \frac{1}{2}$ において $f(x)$ は単調に増加する関数であるから

$$f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+e}{4} > \frac{1}{2} \dots\dots ①$$

ゆえに $x_n > \frac{1}{2}$

$x \neq 1$ のとき $f(x) \neq 1$ であるから $x_n \neq 1$

よって, 平均値の定理より

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = f'(c) \dots\dots ②$$

となる c が 1 と x_n の間に存在する.

①より $c > \frac{1}{2}$ であるから

$$(1) \text{ より } 0 \leq f'(c) < \frac{1}{2}$$

②と $x_{n+1} = f(x_n)$ から

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - 1| &= |f'(c)(x_n - 1)| \\ &< \frac{1}{2}|x_n - 1| \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < |x_n - 1| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1| \rightarrow 0$$

よって, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

この問題は $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ から, 特性方程式の解が $\alpha = 1$ であることが分かる. 実際 $f(1) = 1$ となることで確認できる.

あとは $0 \leq f'(x) < 1$ が保証されるのは $x > \frac{1}{2}$ であるから,

$x_n > \frac{1}{2}$ を確認すれば平均値の定理を用いて極限を求めるための不等式を示すことができる. しかし, 初項が定まっていないため, $x_0 = 1$ とそれ以外に場合分けする必要がある.

さらに, x_n と α の大小関係がはっきりしないので, 絶対値を用いることになる.

4 まとめ

主に, 出題パターンの③について考察してみたが, 平均値の定理を用いて極限を求めるための不等式を導くためには, 次の3つの条件が必要である.

① 特性方程式の解

② $f'(x)$ の単調性または値の範囲

③ ②が保証される x の範囲に一般項が含まれる

不等式を証明する前の小問で誘導する問題がほとんどである. しかし, 問題の流れをしっかりと把握する必要がある. この3条件は目安として知っておく必要がある.

平均値の定理と数列の極限を結びつけた問題は非常に興味深く, 分析をすることで勉強になることが多かったように思える. 生徒に指導する機会はなかなか無い分野ではあるが, 機会あればこの研究を積極的に活用したい.

※ 参考文献

全国大学入試問題正解 数学[国公立大編] (旺文社)

全国大学数学入試問題詳解【国公立大学】 (聖文社)

解析入門 I (杉浦 光夫著・東京大学出版会)