

互除法を用いて1次不定方程式の整数解を求める指導法の研究

—計算のつまずきを乗り越える—

愛媛県立北条高等学校 吉田亮太

1 はじめに

本校は中予唯一の総合学科を設置する県立学校である。例年、数学を苦手とする生徒や基礎的な計算能力が身に付いていない生徒が多数入学しており、義務教育段階の学習内容が十分に定着していない生徒も多く在籍している。愛媛県県立学校振興計画により、本校は令和9年度いっぱいでの役割を終える。令和8年度より、本県初の昼間二部定時制と通信制を並置する北条清新高校として新たなスタートを切る。生徒一人ひとりの状況や適性・個性に応じた柔軟性を持った学びのスタイルを実現し、基礎学力の確実な定着を図り、自己肯定感を高めていくことが、北条高校・北条清新高校ともに大きなテーマとなる。

そのために、私が最も大切だと考えるのは「わかる授業」の実現である。「授業の内容がわかった」「問題を自分の力で解くことができた」という成功体験により、生徒の自己肯定感を高めることができると考える。私は本校に赴任して3年目であり、昨年度までの2年間で数学I・数学A・数学II・数学B・数学Cの指導に携わった。授業を進めていく中で、教科書通りの解法では本校生徒にとって理解が難しいと思われる内容が多々あった。特に昨年、一昨年ともに担当した1年次の数学Aにおけるユークリッドの互除法を用いて1次不定方程式の特殊解を求める内容について、計算のつまずき等の理由から生徒の理解度が低いように感じた。以上の理由により、今年度は計算のつまずきを乗り越え、互除法を用いて1次不定方程式の特殊解を求める指導法を研究することとした。

2 研究の目標

指導法の工夫を通して、互除法を用いて1次不定方程式の特殊解を求める問題を解くことができるようにさせることを目指す。

(1) 目指す生徒の姿

- ・互除法を用いて1次不定方程式の特殊解を求めることができる生徒
- ・努力が成果につながることを実感し、自分に自信が持てた生徒

(2) 目指す教師の姿

- ・生徒のつまずきを深く理解し、生徒の実態に応じて、生徒の学びを支援できる教師

3 研究方法および内容

(1) 教科書の解法と生徒のつまずきを研究する。

研究の対象は、看護・医療系学校への進学を希望している生徒が受験に対応できる学力を養成することを目的とした学校設定科目「数学探求A」（3年次）の生徒とした。全員、数学Aをすでに修得済みである。

取り扱った問題は以下の通りである。

互除法を利用して、方程式 $26x+11y=1$ の整数解の1つを求めよ。

まず、1年次に数学Aで指導した教科書の解法を復習した。本校で採用している教科書（数研出版・最新シリーズ）の解法は以下の通りである。

係数の26と11に互除法を適用すると、次のようになる。

$$26=11\cdot 2+4 \quad \rightarrow \quad 4=26-11\cdot 2$$

$$11=4\cdot 2+3 \quad \rightarrow \quad 3=11-4\cdot 2$$

$$4=3\cdot 1+1 \quad \rightarrow \quad 1=4-3\cdot 1$$

余りに着目して、この計算の逆をたどると

$$\begin{aligned} 1 &= 4-3\cdot 1=4-(11-4\cdot 2)\cdot 1 \\ &= 4\cdot 3-11\cdot 1=(26-11\cdot 2)\cdot 3-11\cdot 1 \\ &= 26\cdot 3+11\cdot (-7) \end{aligned}$$

よって $26\cdot 3+11\cdot (-7)=1$

したがって、整数解の1つとして $x=3$ ， $y=-7$ が得られる。

この解法を丁寧に説明し直した。さらに次の授業で確認テストを行い、テストの記述を分析することで、生徒がどこでつまずいているのかを研究した。正答率は17%であった。記述を分析したところ、互除法の計算と移項まではほとんどの生徒ができていた。しかし、その後代入して計算の逆をたどっていく際、式を整理することが難しい生徒が大半であることがわかった。次のような2つのケースが多い。

$$\begin{aligned} 1 &= 4-3\cdot 1=4-(11-4\cdot 2)\cdot 1 \\ &= 4-11+8 \quad \dots \quad 4\cdot 2 \text{を計算してしまい、迷子になってしまう} \end{aligned}$$

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1$$

$$= 4 - 11 + 4 \cdot 2 \dots 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \text{ の計算が難しい}$$

どのように式を整理していけばよいか、見通しが立ちにくい生徒や、手順の途中で混乱してしまう生徒、分配法則の逆の計算が難しい生徒が多いことがわかった。生徒の感想（自由記述）においても、「代入してからが難しい」「途中で何をやればいいかわからなくなってしまった」といった意見があった。

- (2) つまづきを解消するため解法に工夫を加え、指導法を研究する。

分析した生徒のつまづきを解消するため、生徒の実態に合わせて解法に工夫を加えた。改善した解法は以下の通りである。

係数の26と11に互除法を適用すると、次のようになる。

$$26 = a, \quad 11 = b \text{ とおくと,}$$

$$26 = 11 \cdot 2 + 4 \rightarrow 4 = 26 - 2 \cdot 11 \rightarrow 4 = a - 2b$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3 \rightarrow 3 = 11 - 2 \cdot 4 \rightarrow 3 = b - 2(a - 2b) = -2a + 5b$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \rightarrow 1 = 4 - 1 \cdot 3 \rightarrow 1 = (a - 2b) - (-2a + 5b) = 3a - 7b$$

よって、 $3a - 7b = 1$
 $a = 26, \quad b = 11$ を代入すると、
 $3 \cdot 26 - 7 \cdot 11 = 1$ となるので、
 $26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1$
したがって、整数解の1つとして
 $x = 3, \quad y = -7$ が得られる。

まず、計算をよりシンプルにするために、26と11を文字に置換し、計算を中学2年生レベルの文字式の計算で対応できるようにした。互除法の計算後移項するとき、掛け算の順番を変えておくように指導し、展開の際のつまづきを減らす工夫をした。また、互除法の計算を逆からたどっていくのではなく、そのままの流れを生かすようにした。生徒が何をしたらいいか途中で迷わないように、ユークリッドの互除法と同様に、同じことを繰り返し返せばゴールにたどり着けるアルゴリズムで対応できるようにした。この解法を丁寧に説明し、次の授業で確認テストを行った。結果、正答率は67%に向上した。正解できていなかった生徒についても、前回と比べると記述量が増えており、解法自体は理解していたが途中で計算ミスをしてしまったものであった。生徒の感想（自由記述）においても、「最後に残したいものを文字に置き換えることで計算が見やすくなった」（2回とも正答であった生徒）、「やるのがシンプルになって

やりやすかった」「式が文字式になってやりやすくなった。上から代入していくのもわかりやすかった」（今回は正答になった生徒）、「前より解き方を覚えやすかった」（前回も今回も正答できなかった生徒）といった意見があった。

4 研究の成果と課題

確認テストの正答率は17%から67%となり、成果が出たと言える。1回目のテストで解けなかった問題が2回目のテストでは解けるようになり、自然と笑顔になっている生徒もいた。また、今回の研究を通して、テストの記述をよく観察し、生徒のつまづきに寄り添うことの大切さを再確認できたことも収穫であった。学習内容の難しい部分を生徒と意見交換してみると、自分が予想していなかったところで壁に当たっていることがあった。「これくらいはできるだろう」と授業を進めていくのではなく、「ついてこれていないかもしれない」という視点を持って授業をしていくことが大切だと感じた。今年度も1年次生の数学Aを担当しているため、今回の研究を生かして、3学期の授業では理解度の向上を図りたい。

課題としては、問題を解けるようになったからと言って、学習内容の本質を理解できているとは限らないということだ。「できる」と「わかる」ことは別である。ただ、本校の生徒の実態を考えたとき、まず「できる（解ける）」ようになることはとても大切なプロセスとなる。「できる」ようになることで、自分に自信を持つとともに、学びの本質にも近づいていけると考える。係数が大きく解がなかなか見つからない場合でも、互除法を用いれば数学的に必ず解を見つけることができる。数当てゲームの要素を含む生徒の興味を引きやすい問題であるからこそ、この「必ず解が見つかる」という事実は、数学の魅力を生徒に実感させる絶好の機会になると考える。学びを単なる解法の修得にとどめず、数学の良さを感じられる次元まで導くことが最終的な目標である。

今後の指導の中でも、生徒の実態に合わせて指導法を工夫していくことが必要な場面が多々あるだろう。生徒に数学の授業が楽しいと感じさせられるよう、生徒に寄り添い、対話しながら、柔軟に指導していただける教師でありたい。

参考文献

『最新 数学A』数研出版、2021
『CONNECT 数学A』数研出版、2022