

# 大学入学共通テスト問題の研究

愛媛県立松山中央高等学校 宮内 大知

## 1 はじめに

令和7年度大学入学選抜に係る大学入学共通テストから、出題科目が①『数学Ⅰ，数学A』，『数学Ⅰ』の2科目のうちから1科目を選択，②『数学Ⅱ，数学B，数学C』となっている。数学Aについては，図形の性質，場合の数と確率の2項目全てを解答，数学B，数学Cについては，数列，統計的な推測，ベクトル，平面上の曲線と複素数平面の4項目のうち3項目を選択して解答する。

新課程への変更により，数学②の試験時間は70分となり，これまでは国公立大学理系の二次試験や私立大学の試験で必要とされていた内容が共通テストの出題範囲となった。また，分析・思考問題や量が毎年のように増える傾向にある。

## 2 2025年大学入学共通テスト問題分析

数学Ⅰ・A

第1問

[1]  $a, b$  を実数とする。 $x$  についての方程式

$$(2a + 4b - 2)x^2 + (5a + 11)x - b - 8 = 0 \dots\dots① \text{を考える。}$$

(1)  $a = 1$  とする。 $b$  に着目すると，①の左辺は

$$(4x^2 - 1)b + 16x - 8 \dots\dots②$$

と表せる。よって，②を因数分解すると

$$(2x - 1)(\boxed{\text{ア}}bx + b + \boxed{\text{イ}}) \text{となる。}$$

したがって， $x = \frac{1}{2}$  は①の解の一つであることがわかる。

(2)  $b = 2$  とする。

(i) ①の左辺を因数分解すると

$$(\boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}})\{(a + \boxed{\text{オ}})x - \boxed{\text{カ}}\} \text{となる。}$$

(ii)  $a = 2\sqrt{2}$  のとき，①の解は

$$x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{2} \text{となる。}$$

(iii)  $a = -\boxed{\text{オ}}$  であることは，

$$\text{①の解が } x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{ だけであるための } \boxed{\text{ケ}} \text{。}$$

$\boxed{\text{ケ}}$  の解答群

- ㉔ 必要条件であるが，十分条件ではない
- ㉕ 十分条件であるが，必要条件ではない
- ㉖ 必要十分条件である
- ㉗ 必要条件でも十分条件でもない

| 正答率(%) | 74   | 71.4 | 70.2 | 75.6 |
|--------|------|------|------|------|
| 全国     | 91.1 | 79.0 | 60.2 | 55.6 |

### 【考察】

昨年度の第1問の前半と比較すると，正答率が上がっている。特定の文字に着目した式変形など，基本的な技能が求められる。

[2] 図1のように，直線  $\ell$  上の点  $A$  において  $\ell$  に接する半径2の円を円  $O$  とし， $\ell$  上の点  $B$  において  $\ell$  に接する半径4の円を円  $O'$  とする。円  $O$  と  $O'$  は2点で交わり，その交点を  $P, Q$  とする。

ただし， $\angle APB < \angle AQB$  とする。

さらに， $\angle PAB$  は鋭角であるとする。

このとき， $\triangle PAB$  と  $\triangle QAB$  について考えよう。

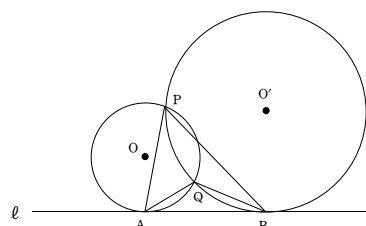


図 1

(1)  $\angle PAB = \alpha$ ， $\angle PBA = \beta$  とおく。

円  $O$  の中心  $O$  から直線  $PA$  に引いた垂線と直線  $PA$  との交点を  $H$  とする。 $\angle OAB = 90^\circ$  であるから， $\angle AOH = \alpha$  である。よって， $\triangle OAH$  に着目すると，

$$AH = \boxed{\text{コ}} \sin \alpha \text{ であるから}$$

$$PA = 2AH = \boxed{\text{サ}} \sin \alpha \dots\dots① \text{ である。}$$

同様に，円  $O'$  の中心  $O'$  から直線  $PB$  に引いた垂線と直線  $PB$  の交点を  $H'$  とすると

$$PB = 2BH' = \boxed{\text{シ}} \sin \beta \dots\dots②$$

であることもわかる。

また， $\triangle PAB$  の外接円の半径を  $R_1$  とおくと，正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \boxed{\text{ス}}} = \frac{PB}{\sin \boxed{\text{セ}}} = 2R_1 \text{ が成り立つので}$$

$$PA \sin \boxed{\text{セ}} = PB \sin \boxed{\text{ス}} \text{ である。}$$

この式に，①と②を代入することにより

$$\sin \boxed{\text{セ}} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} \sin \boxed{\text{ス}}$$

$$PB = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} PA \text{ となることがわかる。}$$

$$\text{さらに } R_1 = \boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}} \text{ が得られる。}$$

$\boxed{\text{ス}}$ ， $\boxed{\text{セ}}$  の解答群

(同じものを繰り返し選んでもよい。)

|            |           |
|------------|-----------|
| ㉔ $\alpha$ | ㉕ $\beta$ |
|------------|-----------|

(2) 太郎さんと花子さんは，(1) の考察を振り返っている。

太郎： $\triangle QAB$  の外接円の半径も求められるかな。

花子：(1) の  $R_1$  の求め方を参考にすればよさそうだね

$\triangle PAB$ ,  $\triangle QAB$  の外接円の半径をそれぞれ  $R_1$ ,  $R_2$  とおく。このとき,  $R_1$    $R_2$  である。

さらに  $\sin \angle APB$    $\sin \angle AQB$  であることもわかる。

,  の解答群

(同じものを繰り返し選んでもよい。)

<  =  >

- (3) 太郎さんと花子さんは, これまでの考察をもとに,  $\triangle PAB$  と  $\triangle QAB$  の辺の長さについて考えている。

太郎:  $AB$  の長さが与えられれば,  $PA$  と  $QA$  の長さが求められそうだね。

花子:  $\angle APB < \angle AQB$  に注意して求めてみようよ。

$AB = 2\sqrt{7}$  とする。このとき

$\sin \angle APB = \frac{\sqrt{\text{トナ}}}{\text{二}}$  である。

(1) より,  $PB = \sqrt{\text{ソ}}$   $PA$  であるから

$PA = \sqrt{\text{ヌネ}}$  である。

同様に,  $QA = \sqrt{7}$  であることがわかる。

| 正答率(%) | コ    | シ    | セ    | ソ    | タ    | チ    | ト    | ニ    | ホ |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
| 全国     | 87.2 | 74.4 | 83.6 | 82.8 | 59.5 | 19.9 | 29.9 | 39.0 |   |

### 【考察】

日常生活の場面に関する問題ではなく, 一般的な図形と計量の問題であった。外接円の半径に関する問題の正答率が低く, 正弦定理を利用した求値問題も正答率が約 60 % となっている。続く, 2 円の半径に関する問題では正確な作図が難しく, 考えにくかった生徒が多かったのではないかなと思う。

### 第2問

- [1] 花子さんと太郎さんは, 公園にある二つの小さな噴水と一つの大きな噴水の高さについて話している。

花子: あの中中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう。

太郎: 実際に高さを測定するのは難しそうだね。噴水の水がえがく曲線は, 放物線になると聞いたことがあるよ。

花子: じゃあ, 放物線と仮定して, およその高さを求めてみよう。

花子さんと太郎さんは, 噴水の高さについて次のように考えることにした。噴水の水がえがく曲線は三つとも放物線とする。三つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある。図 1 のように座標軸が定められた平面上に, 三つの噴水を正面から見た図をかく。

左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の仮定 1 を, 中央の大きな噴水の水がえがく放物線については後の仮定 2 を設定する。

図 1 の  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  は噴水の水が出る位置である。なお, 長さの単位はメートルであるが, 以下では省略する。

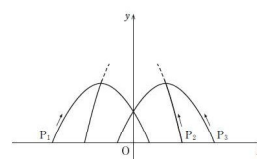


図 1

### 仮定 1

- ・左側の小さな噴水の水がえがく放物線  $C_1$  は,  $x$  軸上の点  $P_1(-\frac{5}{2}, 0)$  から出て点  $(\frac{1}{2}, 0)$  に至る。
- ・右側の小さな噴水の水がえがく放物線  $C_3$  は,  $x$  軸上の点  $P_3(\frac{5}{2}, 0)$  から出て点  $(-\frac{1}{2}, 0)$  に至る。
- ・ $C_1$  と  $C_2$  はともに点  $(0, 1)$  を通る。

### 仮定 2

中央の大きな噴水の水がえがく放物線  $C_2$  は,  $x$  軸上の点  $P_2(\frac{3}{2}, 0)$  から出て  $C_3$  の頂点と  $C_1$  の頂点を通る。

- (1) 仮定 1 と仮定 2 のもとで考える。  $C_1$  をグラフにもつ 2 次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とする。

このとき  $c =$   であり,

また  $y = -\frac{\text{ウ}}{\text{イ}}x^2 - \frac{\text{オ}}{\text{エ}}x + \text{ア}$  である。

$C_1$  の頂点の  $y$  座標は  $\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$  である。

このことを用いると,

$C_2$  の頂点の  $y$  座標は  $\frac{\text{クケ}}{\text{コサ}}$  であることがわかる。

したがって,

大きな噴水の高さは, 小さな噴水の高さの  である。

については, 最も適当なものを,

次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① およそ 2 倍    ② およそ 3 倍  
③ およそ 4 倍    ④ およそ 5 倍

- (2) 花子さんと太郎さんは, 大きな噴水の高さについて話している。

花子: 正面から見たとき, 大きな噴水が小さな噴水の頂点を通して見えるというデザインは変えずに, 大きな噴水の高さを変えることはできるのかな。

太郎: 左右の二つの小さな噴水は変えずに, 大きな噴水の水が出る位置を変えてみたらどうかな。

花子: 大きな噴水の高さが 5 メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう。

仮定 2 の代わりに次の仮定 2' をおく。

仮定 2'

- ・中央の大きな噴水の水がえがく放物線  $C_2'$  は、 $x$  軸の正の部分の点  $P_2'$  から出て  $C_3$  の頂点と  $C_1$  の頂点を通る。
- ・  $C_2'$  の頂点の  $y$  座標は 5 である。

仮定 1 と仮定 2' のもとで考える。このとき、

$P_2'$  は  $P_2$  より ス だけ ソ の方にある。

セ

ソ の解答群 ②  $P_1$  ①  $P_3$

| 正答率(%) | ア    | イエオ  | カ    | クコサ  | シ    | セソ   |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 81.4 | 59.3 | 53.7 | 28.6 | 26.2 | 14.4 |

#### 【考察】

公園の噴水をモデル化して考える問題であった。問題の状況を読み取れば、2 次関数の決定とグラフの平行移動の問題であり、基本的な内容であった。問題文が 6 ページにわたっており、正確に内容を把握することが難しかったのではないと思われる。

- [2] 以下の問題を解答するにあたっては、与えれたデータに対して、次の値を外れ値とする。

「(第 1 四分位数)  $-1.5 \times$  (四分位範囲)」以下の値

「(第 3 四分位数)  $+1.5 \times$  (四分位範囲)」以上の値

太郎さんは、47 都道府県における外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の動向を調べるため、それらに関するデータを分析することにした。外国人宿泊者数を、日本国内に住所を有しない宿泊者の人数の 1 年間の合計とし、日本人宿泊者数を、日本国内に住所を有する宿泊者の人数の 1 年間の合計とする。宿泊者数に関するデータは千の位を四捨五入し、1 万人単位で表したものとし、以下においては単位 (万人) を省略して用いることとする。

例えば、「4567890 人」は「457」とする。なお、以下の図や表については、国土交通省の Web ページをもとに作成している。

(1)

- (i) 図 1 は、47 都道府県における令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の散布図である。なお、散布図には原点を通り、傾きが 10 の直線 (破線) を付加している。また、日本人宿泊者数が 1000 を超える都道府県は 12 である。

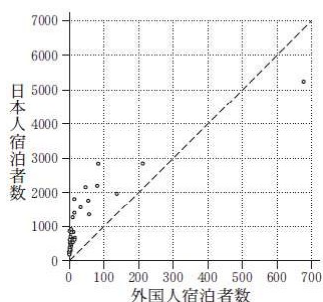


図 1 令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の散布図

次の (a), (b) は図 1 に関する記述である。

- (a) 令和 4 年について、外国人宿泊者数が 100 を超え、かつ日本人宿泊者数が 2500 を超える都道府県は 2 である。
- (b) 令和 4 年について日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の 10 倍未満である都道府県の割合は 50 % 未満である。
- (a), (b) の正誤の組合せとして正しいものは タ である。

タ の解答群

|     | ① | ② | ③ | ④ |
|-----|---|---|---|---|
| (a) | 正 | 正 | 誤 | 誤 |
| (b) | 正 | 誤 | 正 | 誤 |

- (ii) 47 都道府県における令和 4 年の外国人宿泊者数を分布した結果、外れ値となる都道府県は 8 であった。一方、表 1 は 47 都道府県における令和 4 年の日本人宿泊者数を、値の小さい順に並べ、その順に都道府県  $P_1, P_2, \dots, P_{47}$  としたものである。

この中で、外国人宿泊者数で外れ値となる都道府県 ( $P_{37}, P_{40}, P_{42}, P_{43}, P_{44}, P_{45}, P_{46}, P_{47}$ ) に印 \* を付けている。

表 1 47 都道府県における令和 4 年の日本人宿泊者数

| 都道府県 | 日本人宿泊者数 | 都道府県 | 日本人宿泊者数 | 都道府県 | 日本人宿泊者数 | 都道府県 | 日本人宿泊者数 |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| P1   | 182     | P13  | 373     | P25  | 620     | P37* | 1339    |
| P2   | 187     | P14  | 388     | P26  | 625     | P38  | 1399    |
| P3   | 197     | P15  | 395     | P27  | 646     | P39  | 1547    |
| P4   | 204     | P16  | 401     | P28  | 670     | P40* | 1765    |
| P5   | 255     | P17  | 405     | P29  | 683     | P41  | 1814    |
| P6   | 270     | P18  | 452     | P30  | 705     | P42* | 1970    |
| P7   | 276     | P19  | 458     | P31  | 831     | P43* | 2158    |
| P8   | 286     | P20  | 501     | P32  | 832     | P44* | 2195    |
| P9   | 303     | P21  | 522     | P33  | 839     | P45* | 2831    |
| P10  | 321     | P22  | 537     | P34  | 876     | P46* | 2839    |
| P11  | 328     | P23  | 605     | P35  | 925     | P47* | 5226    |
| P12  | 351     | P24  | 613     | P36  | 1251    |      |         |

表 1 のデータにおいて、四分位範囲は チ となることから、令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県は ツ である。

チ の解答群

|       |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| ① 320 | ② 450  | ③ 597  | ④ 638  | ⑤ 900  |
| ⑥ 966 | ⑦ 1253 | ⑧ 1261 | ⑨ 1602 | ⑩ 1864 |

- (2) 47 都道府県におけるある都市の外国人宿泊者数を  $x$ 、日本人宿泊者数を  $y$  とし、 $x$  と  $y$  の値の組を、それぞれ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{47}, y_{47})$  と表す。

$x, y$  の平均値をそれぞれ  $\bar{x}, \bar{y}$  とし、 $x, y$  の分散をそれぞれ  $s_x^2, s_y^2$  とする。

また、 $x$  と  $y$  の共分散を  $s_{xy}$  とする。

47 都道府県それぞれにおける外国人宿泊者数と日本人宿泊者数を足し合わせた合計宿泊者数を  $z$  とし、その値を  $z_i = x_i + y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 47$ ) と表す。

例えば、 $i=7$  のときは  $z_7=x_7+y_7$  である。 $z$  の平均値を  $\bar{z}$  とするとき

$$z_i - \bar{z} = (x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y}) \quad (i=1, 2, \dots, 47)$$

である。

このことに着目すると、 $z$  の分散を  $s_z^2$  とするとき、

$$s_z^2 = \boxed{\text{テ}}$$

また、令和4年の  $x$  と  $y$  の間には正の相関があることが図1からわかる。

このことから、令和4年について、 $s_z^2$  と  $s_x^2 + s_y^2$  の関係として、後の①～④のうち、正しいものは

$\boxed{\text{ト}}$  であることがわかる。

$\boxed{\text{テ}}$  の解答群

- ①  $s_z^2 > s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}$     ②  $s_z^2 > s_x^2 + s_y^2$   
 ③  $s_z^2 < s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}$     ④  $s_z^2 < s_x^2 + s_y^2$

$\boxed{\text{ト}}$  の解答群

- ①  $s_z^2 > s_x^2 + s_y^2$     ②  $s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$   
 ③  $s_z^2 < s_x^2 + s_y^2$

- (3) 太郎さんが住む地域では、その地域に宿泊を促すためのキャンペーンとして、キャンペーンA、Bが実施されている。

太郎さんは、キャンペーンAの方がよいと思っている人が多いという話を聞いた。この話の通り、キャンペーンAの方がよいと思っている人が多いといえるかどうかを確かめることにした。そこで、かたよりなく選んだ人たちに、キャンペーンA、Bのどちらがよいかについて、二択のアンケートを行ったところ、アンケートに回答した35人のうち、23人が「キャンペーンAの方がよい」と答えた。この結果から、一般にキャンペーンAの方がよいと思っている人が多いといえるかどうかを、次の方針で考えることにした。

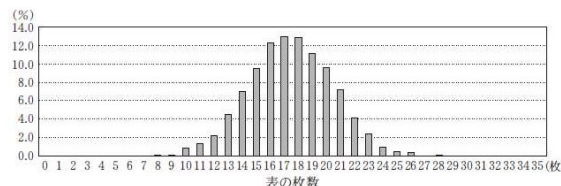
#### 方針

- “「キャンペーンAの方がよい」と回答する割合と「キャンペーンBの方がよい」と回答する割合は等しい”という仮説を立てる。
- この仮説のもとで、偏りなく選ばれた35人のうち23人以上が「キャンペーンAの方がよい」と回答する確率が5%未満であれば、その仮説は誤っていると判断し、5%以上であればその仮説は誤っているとは判断しない。

後の実験結果は、35枚の硬貨を投げる実験を1000回行ったとき、表が出た枚数ごとの回数の割合を示したものである。

実験結果

| 表の枚数(枚) | 0   | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    | 6    | 7    | 8   | 9   | 10  | 11  |
|---------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| 割合(%)   | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.1 | 0.1 | 0.8 | 1.3 |
| 表の枚数(枚) | 12  | 13  | 14  | 15  | 16   | 17   | 18   | 19   | 20  | 21  | 22  | 23  |
| 割合(%)   | 2.2 | 4.5 | 6.9 | 9.5 | 12.3 | 13.0 | 12.9 | 11.2 | 9.6 | 7.2 | 4.1 | 2.4 |
| 表の枚数(枚) | 24  | 25  | 26  | 27  | 28   | 29   | 30   | 31   | 32  | 33  | 34  | 35  |
| 割合(%)   | 0.9 | 0.5 | 0.4 | 0.0 | 0.1  | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |



実験結果を用いると、35枚の硬貨のうち23枚以上が

表となった割合は、 $\boxed{\text{ナ}}$ 、 $\boxed{\text{ニ}}$  %である。これを、35人のうち23人以上が「キャンペーンAの方がよい」と回答する確率とみなし、方針に従うと、“「キャンペーンAの方がよい」と回答する割合と「キャンペーンBの方がよい」と回答する割合は等しい”という

仮説は  $\boxed{\text{ヌ}}$ 。

したがって、今回のアンケート結果からは、

キャンペーンAの方がよいと思っている人が  $\boxed{\text{ネ}}$ 。

$\boxed{\text{ヌ}}$  の解答群

- ① 誤っていると判断する    ② 誤っているとは判断しない

$\boxed{\text{ネ}}$  の解答群

- ① 多いといえる    ② 多いとはいえない

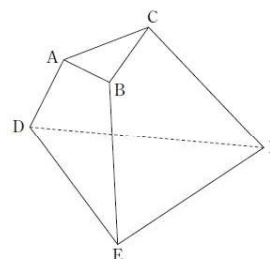
| 正答率(%) | タ    | チ    | ツ    | テ    | ト     | ナニネ  |
|--------|------|------|------|------|-------|------|
| 全国     | 39.8 | 78.1 | 63.2 | 18.7 | 13.28 | 50.2 |

#### 【考察】

試作問題と同様に、外れ値、仮説検定に関する問題が出題された。どちらの問題も基本的な内容を問われており、落ち着いて取り組みれば難しくない。全国的にデータを文字でおいて考える問題は生徒にとって難しいことが読み取れる。分散や標準偏差の公式からきちんと理解させていきたい。

#### 第3問

6点A、B、C、D、E、Fを頂点とし、三角形ABCとDEF、および四角形ABED、ACFD、BCFEを面とする五面体がある。ただし、直線ADとBEは平行でないとする。



- (1) 3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり、平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。

点 P は直線 AD 上にあり、直線 AD は平面 ABED と平面  ア  との交線であるから、点 P は平面  ア  上にあることがわかる。

また、点 P は直線 BE 上にあり、直線 BE は平面 ABED と平面  イ  との交線であるから、点 P は平面  イ  上にあることがわかる。

平面  ア  と平面  イ  との交線は直線 CF であるから、点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって、3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。

ア ,  イ  の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

☐ ① ABC    ☐ ② DEF    ☐ ③ ACFD    ☐ ④ BCFE

- (2) 五面体において、面 ABC は一辺の長さが 3 の正三角形であり  $AD=7$ ,  $BE=11$ ,  $CF=17$ ,  $DE=9$  であるとする。

また、6 点 A, B, C, D, E, F はある一つの球面上にあるとし、その球面を  $S$  とする。直線 AD と BE の交点を P とする。

- (i) 平面 ABED と球面  $S$  が交わる部分は円であり、4 点 A, B, E, D はその円周上にある。  
このことから、三角形 PAB と PED は相似であるとなり、その相似比は  $1 : \text{ウ}$  である。

したがって  ウ   $PA=PB + \text{エオ}$

ウ   $PB=PA + \text{カ}$  が成り立つ。

よって  $PA = \text{キ}$ ,  $PB = \text{ク}$  となる。

- (ii) 平面 BCFE と球面  $S$  が交わる部分に着目すると、  
方べきの定理より  $PC = \text{ケ}$  となる。

したがって  $EF = \text{コサ}$ ,  $DF = \text{シス}$  となる。

- (iii)  $\angle ADE$ ,  $\angle ADF$ ,  $\angle EDF$  の大きさに着目すると、  
次の命題 (a), (b), (c) の真偽の組合せとして  
正しいものは  セ  であることがわかる。

- (a) 平面 ABED と平面 DEF は垂直である。  
(b) 直線 DE は平面 ACFD に垂直である。  
(c) 直線 AC と直線 DE は垂直である。

セ  の解答群

|     | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 真 | 真 | 真 | 真 | 偽 | 偽 | 偽 |
| (b) | 真 | 真 | 偽 | 偽 | 真 | 真 | 偽 |
| (c) | 真 | 偽 | 真 | 偽 | 真 | 偽 | 偽 |

| 正答率(%) | アイ   | ウ     | エカ   | キ    | ケ    | コサス  | セ    |
|--------|------|-------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 85.4 | 77.34 | 73.9 | 52.9 | 49.5 | 22.4 | 14.3 |

#### 【考察】

試作問題とは違い、空間図形が出題された。前半の証明の問題は丁寧に誘導がされており、イメージをもって取り組み難易度は高くない。後半は球と立体の交わる部分に関する問題で、イメージはつかみにくいが、着目する部分どうなっているかを示されており、相似な図形の性質や方べきの定理を扱えば解きやすい。

#### 第4問

ある行事で、主催者が次のゲームを計画している。

#### ゲーム

参加者はくじを最大 3 回引き、当たりが出たら、120 円相当の景品を主催者から受け取り、以降はくじを引かない。参加者はくじを 1 回目、2 回目、3 回目で異なる箱から引く。1 回目のくじ引きで当たりが出なかった場合は 2 回目のくじを引く、2 回目のくじ引きでも当たりが出なかった場合は 3 回目のくじを引く。主催者は、当たりの出る確率について次の通り設定する。

- ・ 1 回目に当たりが出る確率は  $\frac{3}{16}$  である。
- ・ 1 回目に当たりが出ず、かつ 2 回目に当たりが出る確率は  $\frac{1}{8}$  である。
- ・ 1 回目、2 回目ともに当たりが出ず、かつ 3 回目に当たりが出る確率は  $\frac{1}{16}$  である。

ゲームの参加料について、主催者は 2 種類の支払い方法を考えている。参加料に関する設定の妥当性について、主催者は判断を行う。

- (1) 1 回目または 2 回目に当たりが出る確率は  $\frac{\text{ア}}{\text{イウ}}$  で

ある。このことから、1 回目、2 回目ともに当たりが出

ない確率は  $\frac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$  であることがわかる。

1 回も当たりが出ない確率は  $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$  である。

以下では、主催者が参加者に対して負担する金額を  $X$  円とする。すなわち、

参加者がゲームで景品を受け取るとき  $X=1200$ ,  
参加者がゲームで景品を受けとらないとき  $X=0$  である。

#### (2)

- (i) 数量  $X$  の期待値は  $\text{コサシ}$  である。

必要に応じて、次に示す表を用いて考えてもよい。

| $X$ | 0 | 1200 | 計 |
|-----|---|------|---|
| 確 率 |   |      | 1 |

(ii) 次の支払い方法 1 を考える。

支払い方法 1

参加者は 1 回目のくじを引く直前に参加料 500 円を支払う。

支払い方法 1 の場合、主催者が負担する金額  $X$  円の期待値が、参加料の金額 500 円未満であるとき、主催者は参加料の設定は妥当であると判断し、参加料の金額 500 円以上であるとき、参加料の設定は妥当ではないと判断する。

(i) で求めた  $X$  円の期待値  $\boxed{\text{コサシ}}$  円は参加料の

金額 500 円  $\boxed{\text{ス}}$ 。

したがって、主催者は参加料 500 円という設定について

$\boxed{\text{セ}}$  と判断する。

$\boxed{\text{ス}}$  の解答群

① 未満である      ② 以上である

$\boxed{\text{セ}}$  の解答群

① 妥当である      ② 妥当ではない

(3)  $a$  を正の整数とする。次の支払い方法 2 を考える。

支払い方法 2

参加者は 1 回目、2 回目、3 回目のくじを引く直前にそれぞれ料金  $a$  円を支払う。なお、この料金をくじ引き料といい、当たりが出た後は、くじを引かないため、くじ引き料を支払わないことになる。

支払い方法 2 で、ゲームを通して参加者が支払うくじ引き料の合計を参加料とし、 $Y$  円で表す。

(i)  $a = 170$  とする。このとき、次が成り立つ。

- ・ 1 回目に当たりが出るとき、 $Y = 170$  である。
- ・ 1 回目に当たりが出ず、かつ 2 回目に当たりが出るとき、 $Y = 340$  である。
- ・ 1 回目、2 回目ともに当たりが出ないとき、 $Y = 510$  である。

数量  $Y$  の期待値は  $\boxed{\text{ソタチ}}$  である。

なお、必要に応じて、次に示す表を用いて考えてもよい。

| $Y$ | 170 | 340 | 510 | 計 |
|-----|-----|-----|-----|---|
| 確 率 |     |     |     | 1 |

(ii) 支払い方法 2 の場合、主催者が負担する金額  $X$  円の期待値が、参加料  $Y$  円の期待値未満であるとき、主催者はくじ引き料の設定は妥当であると判断し、参加料  $Y$  円の期待値以上であるとき、くじ引き料の設定は妥当ではないと判断する。

(2) の (i) で求めた  $X$  円の期待値  $\boxed{\text{コサシ}}$  円は、

$a = 170$  と設定した場合の支払い方法 2 で参加者が支払う参加料  $Y$  円の期待値  $\boxed{\text{ソタチ}}$  円  $\boxed{\text{ツ}}$ 。

したがって、主催者はくじ引き料 170 円という設定について  $\boxed{\text{テ}}$  と判断する。

また、主催者がくじ引き料の設定が妥当であるという判断するのは  $a > \boxed{\text{トナニ}}$  のときであり、

主催者がくじ引き料の設定が妥当ではないと判断するのは  $a \leq \boxed{\text{トナニ}}$  のときである。

$\boxed{\text{ツ}}$  の解答群

① 未満である      ② 以上である

$\boxed{\text{テ}}$  の解答群

① 妥当である      ② 妥当ではない

| 正答率(%) | ア    | イ    | ウ    | エ    | オ    | カ    | ク    | コ    | サ | シ | ソ | タ | チ | ツ | テ |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|---|---|---|---|---|---|
| 全国     | 90.8 | 77.0 | 66.5 | 62.1 | 54.1 | 42.4 | 33.8 | 21.8 |   |   |   |   |   |   |   |

【考察】

期待値に関する問題が出題された。求めた期待値を使って、参加料の金額の妥当性を問う問題で、思考力が試される問題であった。与えられた条件を理解して判断することができれば解きやすかったのではないと思う。全体的に文章量が多かったため、時間の配分を適切に考える必要があると感じた。

数学Ⅱ・B・C

第 1 問

(1)  $0 \leq \theta < \pi$  のとき、

方程式  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta$  ……① の解を求めよう。

以下では、 $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$ 、 $\beta = 2\theta$  とおく。

このとき、① は  $\sin \alpha = \sin \beta$  ……② となる。

(i) 二つの一般角  $\alpha$  と  $\beta$  が等しければ、 $\sin \alpha$  と  $\sin \beta$

は等しい。 $\alpha = \beta$  を満たす  $\theta$  は  $\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$  であり、

これは①の解の一つである。

そして、 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$  のとき

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$  となる。

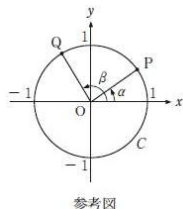
(ii) 太郎さんと花子さんは、 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$  以外の①の解を

求める方法について話している。

太郎：角が等しくなくても、サインの値が等しくなることがあるね。  
花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか、単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において、中心が O で、半径が 1 の円を C とする。

さらに、 $\alpha$  の動径と C との交点を P、 $\beta$  の動径と C との交点を Q とする。ここで、動径は O を中心とし、その始線は  $x$  軸の正の部分とする。



参考図

②が成り立つときに、点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として、

次の ⑩～⑬ のうち、正しいものは  である。

の解答群

- ⑩ 点 P と点 Q は同じ点である。
- ⑪ 点 P の  $x$  座標と、点 Q の  $x$  座標が等しい。
- ⑫ 点 P の  $y$  座標と、点 Q の  $y$  座標が等しい。
- ⑬ 点 P と点 Q は、原点 O に関して対称である。

(iii)  $\theta \asymp \frac{\pi}{\text{ア}}$  とする。

・  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の場合を考える。

このとき、 $0 \leq \beta \leq \pi$  であるので、②が成り立つとき、(ii) で考察したことに注意すると、

$\alpha$  と  $\beta$  は  $\alpha + \beta = \text{オ}$  を満たすことがわかる。

これより、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のときの①の解  $\theta = \frac{\text{カ}}{\text{キク}} \pi$

を得る。

・  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  の場合を考える。

このとき、 $\pi < \beta < 2\pi$  であるので、②が成り立つとき、(ii) で考察したことに注意すると、

$\alpha$  と  $\beta$  は  $\alpha + \beta = \text{ケ}$  を満たすことがわかる。

これより、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  のときの①の解  $\theta = \frac{\text{コサ}}{\text{シス}} \pi$

を得る。

以上より、 $0 \leq \theta < \pi$  のとき、①の解は

$\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}, \frac{\text{カ}}{\text{キク}} \pi, \frac{\text{コサ}}{\text{シス}} \pi$  である。

,  の解答群

|   |        |   |                  |   |        |   |                  |
|---|--------|---|------------------|---|--------|---|------------------|
| ⑩ | 0      | ⑪ | $\frac{\pi}{2}$  | ⑫ | $\pi$  | ⑬ | $\frac{3}{2}\pi$ |
| ⑭ | $2\pi$ | ⑮ | $\frac{5}{2}\pi$ | ⑯ | $3\pi$ | ⑰ | $\frac{7}{2}\pi$ |

(2)  $0 \leq \theta < \pi$  のとき、方程式  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$  の解は

$\theta = \frac{\pi}{\text{セ}}, \frac{\text{ソタ}}{\text{チツ}} \pi$  である。

| 正答率(%) | アイ   | エ    | カキ   | クコサス | セ    | ソタチ  |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 84.1 | 75.5 | 47.1 | 25.7 | 59.6 | 29.7 |

【考察】

単位円を利用した三角関数の基本を問う問題であった。sin の考え方をうまく cos に応用する力が求められた。

第2問

学校の池でメダカを飼うことが決まり、メダカの飼育係になった花子さんは、水質を良くする効果がある水草 A を水面に浮かべることにした。一方で、水草 A が増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは、水草 A を定期的に除去することにし、その作業の計画を立てるために次の基本方針を定めた。

基本方針

- ・ 水草 A の量を水草 A が池の水面を覆う面積の割合(%) で測ることとし、この量をもとに作業計画を立てる。
- ・ 作業は正午に行う。

(1) 水草 A の増え方を知るために、観測を行った。

次の表は、観測を開始した日を 0 日目として、0 日目、3 日目、6 日目、9 日目の正午に観測した水草 A の量を表したものである。

| 観測日(日目)    | 0    | 3    | 6    | 9    |
|------------|------|------|------|------|
| 水草 A の量(%) | 17.2 | 22.7 | 30.0 | 39.6 |

水草 A の量が 3 日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第 3 位を四捨五入したところ、いずれも 1.32 倍であることがわかった。水草 A の量は、3 日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから、

「水草 A の量は、1 日ごとに一定の倍率で増える」と考え、その倍率を定数  $r$  とした。観測結果から、3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えた。

このとき、 $r$  は  = 1.32 を満たす。

$\log_{10} 1.32 = \text{イ}$  であるので

$\log_{10} r = 0. \text{ウエオカ}$  が得られる。

の解答群

|   |       |   |               |   |            |
|---|-------|---|---------------|---|------------|
| ① | $r$   | ② | $\frac{r}{3}$ | ③ | $3r$       |
| ④ | $r^3$ | ⑤ | $3^r$         | ⑥ | $\log_3 r$ |

については、

最も適当なものを、次の ⑦～⑪ のうちから一つ選べ。

|   |        |   |        |   |        |   |        |
|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|
| ⑦ | 0.0899 | ⑧ | 0.1206 | ⑨ | 0.1523 | ⑩ | 0.2148 |
| ⑪ | 0.2405 | ⑫ | 0.3010 | ⑬ | 0.3636 | ⑭ | 0.4771 |

- (2) 花子さんは、基本方針に次の条件を加えて、作業計画を立てることにした。

条件

- ・ 作業は 14 日ごとに行う。
- ・ 作業の後に残す水草 A の量を、次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 % を超えない範囲で、できるだけ多くする。

作業の後に残す水草 A の量について考える。

作業を行った日を 0 日目として、次回の作業は 14 日目に行う。なお、作業にかかる時間は考えないものとする。

次のような実数  $a$  を考える。

作業の後に残す水草 A の量を  $a$  % としたとき、

14 日目の正午に水草 A の量がちょうど 60 % になる。

このとき、(1) の定数  $r$  を用いると、14 日目の正午に水草 A の量は  $a$  の  $\boxed{\text{キ}}$  倍になるので

$$a \times \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{クケ}} \quad \dots\dots \text{①} \quad \text{が成り立つ。}$$

①の両辺の常用対数を取り、(1) で求めた

$$\log_{10} r = 0.\boxed{\text{ウエオカ}} \quad \text{と} \quad \log_{10} 6 = 0.7782 \quad \text{であることを}$$

用いると、 $\log_{10} a = \boxed{\text{コ}}$  となる。

$a$  の決め方から、作業の後に残す水草 A の量を  $a$  % 以下にすれば、次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 % を超えないことがわかる。

$a$  以下で最大の整数は  $\boxed{\text{サン}}$  であることから、

花子さんは作業の後に残す水草 A の量を  $\boxed{\text{サン}}$  % にすることとした。

$\boxed{\text{キ}}$  の解答群

- ①  $r$       ②  $\frac{r}{14}$       ③  $14r$       ④  $r^{14}$       ⑤  $14^r$       ⑥  $\log_{14} r$

$\boxed{\text{コ}}$  については、最も適当なものを、次の⑦～⑩のうちから一つ選べ。

- ⑦ 0.7758      ⑧ 1.0670      ⑨ 1.0934      ⑩ 1.2154  
⑪ 1.3410      ⑫ 1.4894      ⑬ 1.7806      ⑭ 2.4666

| 正答率(%) | ア    | イ    | ウエオカ | キケ   | コ    | サン   |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 62.7 | 90.5 | 59.4 | 56.1 | 48.9 | 18.0 |

### 【考察】

日常生活の場面で指数関数、対数関数を利用する問題であった。小数の計算をミスなくこなす計算力が要求された。また、指数と対数の関係をきちんと理解しておく必要があり、基礎基本の重要性を改めて感じた。常用対数が日常の様々な場面で活用できることを授業の中で意識させていきたい。

### 第3問

$k$  を 0 でない実数とし、 $f(x)$  を 2 次関数とする。

$F(x)$  と  $G(x)$  はどちらも導関数が  $f(x)$  であるような関数で、

$F(x)$  は  $x=0$  で極小値 0 をとり、 $G(x)$  は  $x=k$  で極大値 0 をとるとする。

- (1) まず、 $F(x)=2x^3+3x^2$  の場合を考える。

$F(x)$  の導関数が  $f(x)$  であることから

$$f(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 + \boxed{\text{イ}} x \quad \text{であり、}$$

$F(x)$  は  $x = \boxed{\text{ウエ}}$  で極大値をとる。

また、 $G(x)$  の導関数が  $f(x)$  であることから

$$G(x) = \boxed{\text{オ}} x^3 + \boxed{\text{カ}} x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \text{と表され、}$$

$G(x)$  は  $x = \boxed{\text{キ}}$  で極小値をとる。

さらに  $G(x)$  に関する条件から  $C = \boxed{\text{クケ}}$  である。

- (2) 次に、 $k > 0$  の場合を考える。

このとき、 $F(x)$  と  $G(x)$  に関する条件から、 $y = F(x)$  のグラフと  $F(x)$ 、 $G(x)$  の極値について調べよう。

- (i)  $F(x)$  が  $x=0$  で極小値をとることから、

$$f(0) = \boxed{\text{コ}}$$
 であり、

$x=0$  の前後で  $f(x)$  の符号は  $\boxed{\text{サ}}$ 。

さらに、 $G(x)$  が  $x=k$  で極大値をとることから、

$$f(k) = \boxed{\text{シ}}$$
 であり、

$x=k$  の前後で  $f(x)$  の符号は  $\boxed{\text{ス}}$ 。

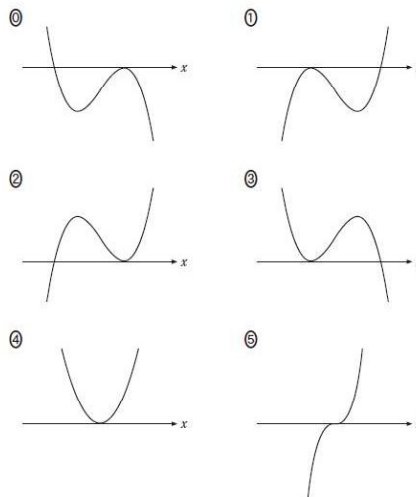
したがって、 $F(x)$  の導関数は  $f(x)$  であることに注意すると、座標平面において  $y = F(x)$  のグラフの概形は

$\boxed{\text{セ}}$  であることがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$ 、 $\boxed{\text{ス}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① 負から正に変わる      ② 正から負に変わる  
③ 変わらない

$\boxed{\text{セ}}$  については、最も適当なものを、次の⑦～⑩のうちから一つ選べ。なお、 $y$  軸は省略しているが、上方向が正の方向であり、 $x$  軸は直線  $y=0$  を表している。



(ii)  $F(x)$  に関する条件から、すべての実数  $x$  に対して

$$F(x) = \int_{\text{カ}}^{\text{キ}} f(t) dt \text{ が成り立つ。}$$

このことと (i) の考察により、

$$F(x) \text{ の極大値は } \int_{\text{ク}}^{\text{ケ}} f(t) dt \text{ と表され、}$$

$F(x)$  の極大値は、関数  $y = \text{テ}$  のグラフと  $x$  軸で

囲まれた図形の  $\text{ト}$  と等しいことがわかる。

さらに  $G(x)$  に関する条件から、 $F(x)$  の極大値は、

$G(x)$  の  $\text{ナ}$  と等しいことがわかる。

$\text{ソ}$  ~  $\text{ツ}$  の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 0      ① 1      ②  $k$       ③  $x$

$\text{テ}$  の解答群

①  $f(x)$       ①  $F(x)$       ②  $G(x)$

$\text{ト}$  の解答群

① 面積      ① 面積の  $-1$  倍

$\text{ナ}$  の解答群

① 極小値      ① 極大値  
② 極小値の  $-1$  倍      ③ 極大値の  $-1$  倍

| 正答率(%) | アイ   | ウエ   | カ    | キ    | ク    | コサ   | シ    | セ    |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 96.5 | 88.5 | 92.1 | 83.3 | 70.7 | 68.5 | 59.3 | 33.5 |

| 正答率(%) | ソ    | タ    | チ    | テ    | ナ |
|--------|------|------|------|------|---|
| 全国     | 47.1 | 42.7 | 35.8 | 39.5 |   |

# 【考察】

全体的に解きやすい難易度であった。関数が極小値と極大値をとる条件など、細かいところをきちんと身につけさせておきたい。

## 第4問

座標平面上で、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。いくつかの直線や曲線で囲まれた図形の内部にある格子点の個数を考えよう。

ただし、図形の内部は、境界 (境界線) を含まないものとする。

例えば、直線  $y = -x + 5$  と  $x$  軸、 $y$  軸で囲まれた図形を  $S$  とする。 $S$  は図1の灰色部分であり、 $S$  の内部にある格子点を黒丸、内部にない格子点を白丸で表している。

したがって、 $S$  の内部にある格子点の個数は6である。

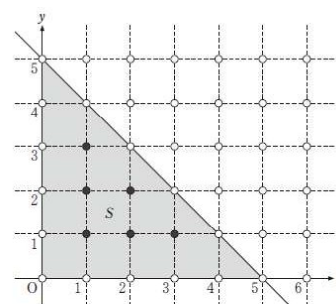


図 1

(1) 直線  $y = 3x$  と  $x$  軸、直線  $x = 21$  で囲まれた図形を  $T$  とする。 $T$  の内部にある格子点の個数を考える。  
直線  $x = 1$  上の格子点で  $T$  の内部にあるものは、点  $(1, 1)$  と点  $(1, 2)$  の2個である。

点  $(1, 0)$  と点  $(1, 3)$  は  $T$  の境界にあるため内部にはない。  
 $n$  を整数とする。

直線  $x = n$  が  $T$  の内部にある格子点を通るのは、

$1 \leq n \leq 20$  のときである。

$1 \leq n \leq 20$  のとき、直線  $x = n$  上の格子点で  $T$  の内部にあるものの個数を  $a_n$  とおく。

$a_1 = 2$  であり、 $a_2 = \text{ア}$ 、 $a_3 = \text{イ}$  である。

数列  $\{a_n\}$  は  $\text{ウ}$  が  $\text{エ}$  の  $\text{オ}$  数列である。

したがって、

$T$  の内部にある格子点の個数は  $\text{カキク}$  である。

$\text{ウ}$  の解答群

① 公差      ① 公比

$\text{オ}$  の解答群

① 等差      ① 等比

(2)  $n$  を自然数とする。

関数  $y = 2^x$  のグラフと  $x$  軸、 $y$  軸および直線  $x = n + 1$  で囲まれた図形を  $U$  とする。

$k$  を整数とする。

直線  $x = k$  が  $U$  の内部にある格子点を通るとき、

直線  $x = k$  上の格子点で  $U$  の内部にあるものの個数は

$\text{ケ}$  である。

したがって、 $U$  の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^n (\text{ケ}) = \text{サ} \text{ である。}$$

ケ の解答群

|               |               |             |
|---------------|---------------|-------------|
| ① $2k-2$      | ④ $2k-1$      | ⑦ $2k$      |
| ③ $2^{k-1}-2$ | ⑤ $2^{k-1}-1$ | ⑧ $2^{k-1}$ |
| ⑥ $2^k-2$     | ⑨ $2^k-1$     | ⑩ $2^k$     |

コ の解答群

|           |         |             |
|-----------|---------|-------------|
| ① $n-1$   | ④ $n$   | ⑦ $n+1$     |
| ③ $2n-1$  | ⑤ $2n$  | ⑧ $2n+1$    |
| ⑥ $2^n-1$ | ⑨ $2^n$ | ⑩ $2^{n+1}$ |

サ の解答群

|                  |                 |                  |
|------------------|-----------------|------------------|
| ① $2^n-2n-1$     | ④ $2^n-2n$      | ⑦ $2^n-n-1$      |
| ③ $2^n-n$        | ⑤ $2^n-3$       | ⑧ $2^{n+1}-2n-2$ |
| ⑥ $2^{n+1}-2n-1$ | ⑨ $2^{n+1}-n-2$ |                  |
| ⑩ $2^{n+1}-n-1$  | ⑪ $2^{n+1}-3$   |                  |

- (3)  $a, b, c$  は整数で,  
 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$  を満たすとする。  
 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  と  $x$  軸,  $y$  軸および  
 直線  $x = n + 1$  で囲まれた図形を  $V$  とする。すべての自然  
 数  $n$  に対して,  $V$  の内部にある格子点の個数が  $n^3$  とな  
 るのは,

$a = \boxed{\text{シ}}$ ,  $b = \boxed{\text{スセ}}$ ,  $c = \boxed{\text{ソ}}$  のときである。

| 正答率(%) | アイ   | ウエオ  | カキ   | ケ    | コ    | サ    | シセソ  |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 79.5 | 78.4 | 45.4 | 49.8 | 47.5 | 34.6 | 11.1 |

#### 【考察】

格子点に関する問題で, 内容は難しかったが誘導が丁寧であっ  
 た。Σの公式を正しく利用できる計算力を身につけさせたい。最  
 後の問題は誘導がなく, イメージを持つことも難しかったと思わ  
 れる。

#### 第5問

Q 地域ではレモンを栽培しており, 収穫されるレモンを重  
 さによってサイズごとに分類している(表1)。  
 過去に収穫されたレモンの重さは, 平均が110g, 標準偏差が  
 20g の正規分布に従うとする。

表1 レモンのサイズと重さの対応関係

| サイズ | レモン1個の重さ          |
|-----|-------------------|
| S   | 80g 以上 90g 未満     |
| M   | 90g 以上 110g 未満    |
| L   | 110g 以上 140g 未満   |
| 2L  | 140g 以上 170g 未満   |
| その他 | 80g 未満または 170g 以上 |

- (1) Q 地域で今年収穫されるレモンの重さ(単位は g) は,  
 過去に収穫されたレモンの重さと同じ分布に従うとする。  
 すなわち, 今年収穫される1個のレモンの重さを確率変数  
 $X$  で表すと,  $X$  は正規分布  $N(110, 20^2)$  に従うとする。

よって, 今年収穫されるレモンから無作為にレモンを1個  
 抽出するとき, そのレモンがLサイズである確率は,  
 $P(110 \leq X < 140) = P(110 \leq X \leq 140)$  であることに  
 注意すると, 0.  $\boxed{\text{アイウエ}}$  である。

いま, Q 地域で今年収穫されるレモンが20万個であると  
 し, その中のLサイズのレモンの個数を確率変数  $Y$  で表す  
 と,  $Y$  は二項分布に従い,  $Y$  の平均(期待値)は  
 $\boxed{\text{オ}}$  となる。

$\boxed{\text{オ}}$  については, 最も適当なものを, 次の①~⑦のうちから一つ選べ。

|         |          |          |          |
|---------|----------|----------|----------|
| ① 13100 | ④ 13360  | ⑦ 31740  | ⑩ 68260  |
| ② 86640 | ⑤ 100000 | ⑧ 168260 | ⑨ 186640 |

- (2) 太郎さんと花子さんは, Q 地域で今年収穫されるレモ  
 ンから何個かを抽出して今年収穫されるレモンの重さの平  
 均(母平均)を推定する方法について話している。

太郎: 母平均に対する信頼度95%の信頼区間の幅を4g  
 以下にして推定したいね。  
 花子: 母標準偏差を過去と同じ20g とすると, 何個のレ  
 モンの重さを量ればいいかな。  
 太郎: 信頼区間の式から, 必要な標本の大きさを求めてみ  
 ようよ。

母平均に対する信頼度95%の信頼区間の幅を4g 以下  
 にするために必要な標本の大きさを求める。

いま, Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし,  
 その重さの母平均を  $m$  g, 母標準偏差を  $\sigma$  g とする。  
 この母集団から無作為に抽出した  $n$  個のレモンの重さを  
 確率変数  $W_1, W_2, \dots, W_n$  で表すと, 標本の大きさ  $n$   
 が十分に大きいとき,

標本平均  $\overline{W} = \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \dots + W_n)$  は近似的に

正規分布  $N(m, \boxed{\text{カ}})$  に従う。

また,  $m$  に対する信頼度95%の信頼区間を  $A \leq m \leq B$

と表すと, 信頼区間の幅は  $B - A = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}}$  となる。

したがって, 母標準偏差を過去と同じ  $\sigma = 20$  として,  
 $n$  に関する不等式

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}} \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{を満たす自然数 } n \text{ を}$$

求めればよい。

①の両辺は正であるから, 両辺を2乗して整理すると,

$$\boxed{\boxed{\text{キ}}}^2 \leq 16n \text{ となる。}$$

この不等式を満たす最小の自然数  $n$  を  $n_0$  とすると,

$$n_0 = \boxed{\text{クケコ}} \text{ である。ゆえに,}$$

$m$  に対する信頼度95%の信頼区間の幅を4g以下にする

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$$
 が成り立ち、

これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}x + \boxed{\text{オ}}y = \boxed{\text{ウ}} \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ となる。}$$

逆に、実数  $x, y, z$  が  $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  を満たすとき、  
 $C(x, y, z)$  は  $S$  上の点であり、 $\triangle ABC$  は正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$  の解答群

|                                |                                           |                                           |
|--------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\textcircled{0}$ 0            | $\textcircled{1}$ 1                       | $\textcircled{2}  \vec{AB} $              |
| $\textcircled{3}  \vec{AB} ^2$ | $\textcircled{4} \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ | $\textcircled{5} \vec{OA} \cdot \vec{AB}$ |

$\boxed{\text{ウ}} \sim \boxed{\text{オ}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

|                       |                           |                                |
|-----------------------|---------------------------|--------------------------------|
| $\textcircled{0} a$   | $\textcircled{1} (1+a)$   | $\textcircled{2} (1-a)$        |
| $\textcircled{3} a^2$ | $\textcircled{4} (1-a^2)$ | $\textcircled{5} \sqrt{1-a^2}$ |

(2)  $a$  に具体的な値を代入して、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるかどうかを調べよう。

(i)  $a = \frac{3}{5}$  のとき、 $\textcircled{2}$  と  $\textcircled{3}$  を満たす実数  $x, y$  は

$$x = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, y = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} \text{ である。}$$

この  $x, y$  に対して、 $\textcircled{1}$  を満たす実数  $z$  は  $\boxed{\text{サ}}$  。

したがって、  
 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  は  $\boxed{\text{サ}}$  。

(ii)  $a = -\frac{3}{5}$  のときも調べよう。(i) と同様に考えると

$\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  は  $\boxed{\text{シ}}$  ことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

|                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\textcircled{0}$ ない       | $\textcircled{1}$ ちょうど一つある | $\textcircled{2}$ ちょうど二つある |
| $\textcircled{3}$ ちょうど三つある | $\textcircled{4}$ ちょうど四つある | $\textcircled{5}$ 無限に多くある  |

(3)  $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるための、 $a$  に関する条件を見つけよう。

実数  $x, y, z$  は、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  を満たすとする。

$\textcircled{2}$  と  $\textcircled{3}$  から

$$x = \boxed{\text{ウ}}, y = \frac{\boxed{\text{ウ}}(1 - \boxed{\text{エ}})}{\boxed{\text{オ}}} \text{ である。}$$

このとき、 $\textcircled{1}$  から

$$z^2 = \boxed{\text{ア}} - x^2 - y^2 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{1+a} \text{ となる。}$$

さらに、 $z^2 \geq 0, 1+a > 0$  であるから  $\boxed{\text{ス}} \geq 0$  である。

逆に、 $\boxed{\text{ス}} \geq 0$  のとき、

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  を満たす実数  $x, y, z$  があることがわかる。

以上のことから、

$\boxed{\text{セ}}$  は、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるための必要十分条件である。

$\boxed{\text{ス}}$  の解答群

|                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| $\textcircled{0} 1-2a$          | $\textcircled{1} (1-a)^2$        |
| $\textcircled{2} (1+2a)^2$      | $\textcircled{3} (1+2a)(1-a)$    |
| $\textcircled{4} (1-2a)(1-a)$   | $\textcircled{5} (1-2a^2)(1+2a)$ |
| $\textcircled{6} (1+2a^2)(1-a)$ | $\textcircled{7} (1-2a^2)(1-a)$  |

$\boxed{\text{セ}}$  の解答群

|                                                                                       |                                           |                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\textcircled{0} -1 < a < 1$                                                          | $\textcircled{1} -1 < a \leq \frac{1}{2}$ | $\textcircled{2} -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\textcircled{3} -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$                                | $\textcircled{4} -\frac{1}{2} \leq a < 1$ | $\textcircled{5} \frac{1}{2} \leq a < 1$                             |
| $\textcircled{6} -1 < a \leq -\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \leq a < 1$               |                                           |                                                                      |
| $\textcircled{7} -1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ |                                           |                                                                      |

| 正答率(%) | ア    | イ    | ウエ   | カケコ  | サ    | シ    | ス    | セ    |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 87.8 | 73.0 | 53.8 | 44.2 | 59.0 | 30.4 | 36.8 | 24.7 |

【考察】

座標空間における球面上の3点が正三角形をなす条件に関する問題であった。誘導は丁寧で、また、例年と比べれば計算量が少なくなるよう設定されていた。しかし、空間図形の問題であり、3つの変数を扱う点を考えると難しく感じる生徒も多いと思われる。

第7問

$\alpha, \beta, \gamma$  を異なる複素数とし、複素数平面上に3点  $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$  をとる。直線  $AB$  と直線  $AC$  の関係について考えよう。

以下、複素数の偏角は  $0$  以上  $2\pi$  未満とする。

(1)  $\alpha = 3+2i, \beta = 7, \gamma = 7+10i$  の場合を考える。

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$  の偏角を求めよう。

$$\gamma - \alpha = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}i, \quad \beta - \alpha = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}i$$

であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \boxed{\text{オ}} \text{ であり、} \boxed{\text{オ}} \text{ の偏角は } \boxed{\text{カ}} \text{ である。}$$

$\boxed{\text{オ}}$  の解答群

|                      |                       |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| $\textcircled{0} i$  | $\textcircled{1} 1+i$ | $\textcircled{2} 2$  | $\textcircled{3} 2i$  |
| $\textcircled{4} -i$ | $\textcircled{5} 1-i$ | $\textcircled{6} -2$ | $\textcircled{7} -2i$ |

$\boxed{\text{カ}}$  の解答群

|                                  |                                  |                                 |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| $\textcircled{0} 0$              | $\textcircled{1} \frac{\pi}{6}$  | $\textcircled{2} \frac{\pi}{4}$ | $\textcircled{3} \frac{\pi}{3}$  |
| $\textcircled{4} \frac{\pi}{2}$  | $\textcircled{5} \frac{3}{4}\pi$ | $\textcircled{6} \pi$           | $\textcircled{7} \frac{5}{4}\pi$ |
| $\textcircled{8} \frac{3}{2}\pi$ | $\textcircled{9} \frac{7}{4}\pi$ |                                 |                                  |

(2)  $w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  とおく。

直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは、

$w$  の偏角が  $\frac{\pi}{2}$  または  $\frac{3}{2}\pi$  のときである。

このとき、 $w$  は  であるから  $w + \overline{w} =$

である。

逆に、 $w \neq 0$  に注意すると、

$w + \overline{w} =$   のとき、

$w$  は  であるので、直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

の解答群

- |                  |                     |
|------------------|---------------------|
| ① 0でない実数         | ③ $1+i$ または $1-i$   |
| ② 純虚数(実部が0である虚数) | ④ $-1+i$ または $-1-i$ |

の解答群

- |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| ① 0    | ② 1    | ③ 2    | ④ $i$  |
| ⑤ $2i$ | ⑥ $-1$ | ⑦ $-2$ | ⑧ $-i$ |

(3)  $z$  は 0, 2,  $-2$  でない複素数とする。

(i)  $\alpha = z, \beta = 2, \gamma = \frac{4}{z}$  とする。

直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための条件について考えよう。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{4}{z} - z}{2 - z} = 1 + \frac{2}{z} \quad \text{が成り立つので、}$$

直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = \text{ク} \quad \text{と変形できる。}$$

さらに、この両辺に  $z\overline{z}$  をかけて整理すると、

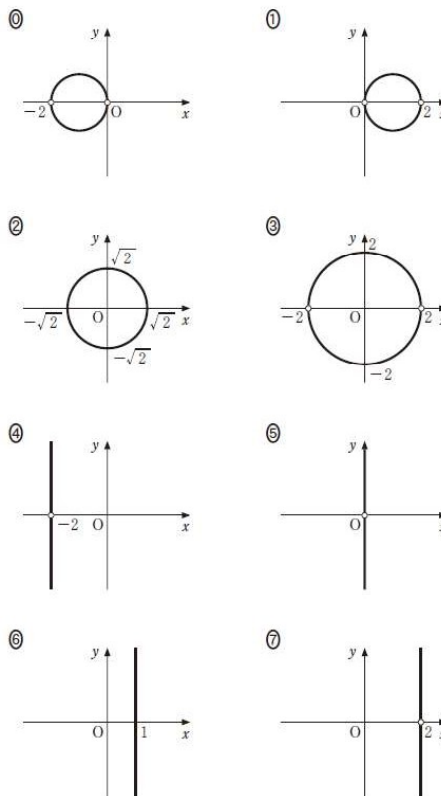
直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は  であることがわかる。

したがって、直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると  である。

の解答群

- |                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| ① $ z  =  z - 4 $ | ⑤ $ z  =  z - 2 $     |
| ② $ z  =  z + 4 $ | ⑥ $ z + 1  =  z - 1 $ |
| ③ $ z - 1  = 1$   | ⑦ $ z  = 2$           |
| ④ $ z + 1  = 1$   | ⑧ $ z  = \sqrt{2}$    |

については、最も適当なものを、次の⑨～⑮のうちから一つ選べ。



(ii) (i) の  $\alpha, \beta, \gamma$  をそれぞれ  $-1$  倍した複素数

$$\alpha' = -z, \beta' = -2, \gamma' = -\frac{4}{z}$$

について考える。

複素数平面上の異なる3点  $A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma')$  について、直線  $A'B'$  と直線  $A'C'$  が垂直になるような点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると

である。

(iii) (i) の  $\alpha, \beta, \gamma$  における  $z$  を  $-z$  に置き換え、

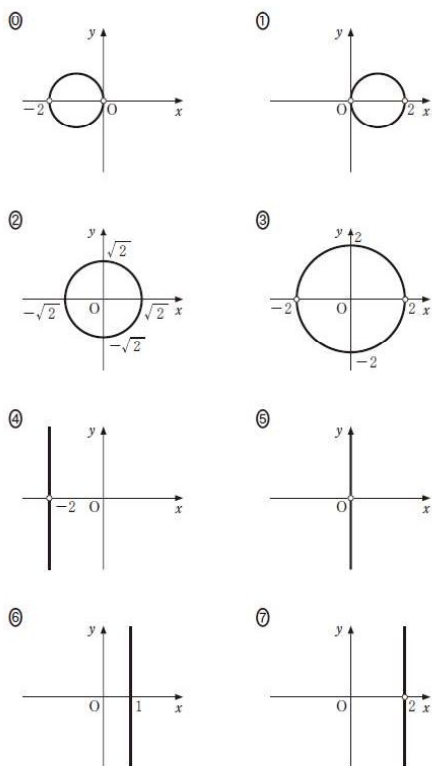
$$\alpha'' = -z, \beta'' = 2, \gamma'' = -\frac{4}{z}$$

について考える。

複素数平面上の異なる3点  $A''(\alpha''), B''(\beta''), C''(\gamma'')$  について、直線  $A''B''$  と直線  $A''C''$  が垂直になるような点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると

である。

「サ」、「シ」については、最も適当なものを、次の①～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。



| 正答率(%) | アイエ  | オ    | カ    | キ    | ケ    | コ    | サ    | シ    |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 全国     | 84.8 | 76.4 | 64.8 | 60.0 | 40.2 | 38.8 | 29.7 | 27.7 |

#### 【考察】

試作問題で出題されていた、「平面上の曲線」に関する問題がなかった。複素数平面の問題では、2直線が垂直になる条件について考え、その点が描く軌跡を調べる問題で、とても丁寧な誘導があった。内容としては標準的であった。

### 3 終わりに

①『数学Ⅰ，数学A』では、全問必答で4題を解答する形式になった。今回は、「データの分析」の外れ値，仮説検定，「場合の数と確率」の期待値が出題された。全体的に前半の誘導が丁寧にされており，後半でそれを応用して考える問題が出された。

②『数学Ⅱ，数学B，数学C』では，問題の構成が変更され，必答問題が3題，選択問題が4題から3題を選択して合計6題を解答する形式となった。問題数も文量も増加したが，難易度や計算量は例年と大きく変わっていない。

文字式で表され，一般化された問題にも対応できるよう，文理を問わずに基礎・基本の定着させていきたい。また，年々増える文章の量にも対応できるように，問題を解く際に必要な情報をしっかりと読み取れる読解力も意識させていきたい。

#### 〈参考資料〉

- ・令和7年度大学入学共通テスト（本試）  
（独立行政法人大学入試センター）
- ・『数研通信 数学No.112』  
（数研出版）