

国公立大学入試問題の研究 一場合の数と確率一

愛媛県立宇和島南中等教育学校 岡 颯天

1 はじめに

多くの学校で高校1年次に取り扱う、数学Ⅰ、数学Aの学習内容の中で、最も入試問題に直接的に取り扱われている分野の1つに、場合の数と確率の分野があると感じる。文系学部・理系学部問わず出題されており、愛媛大学の理系入試においては、数学Ⅲの基礎的知識を多く問う大問(例年の大問④)の中に、確率の基本問題が含まれている。場合の数と確率の問題を解く際に使われる思考力は、高等教育においても必要だと考えられていると感じる。

現行の新課程大学入学共通テストが実施されるようになってからは、数学ⅠAにおいて、場合の数と確率に関する問題が必答問題となっており、より確かな理解が求められる分野である。一方で、私自身の指導力不足でもあるが、理解度に大きく差が出る分野の1つだとも感じている。特に、第1問から計算を間違ひ、それ以降の問いも全て間違ひしてしまうという生徒をよく見かける。そこで、各大学がどのような問題を入試で出題し、どのような力を問っているのかを理解することで、普段の教科指導、受験対策指導にも生かしていきたいと考え、今回研究するにいった。

2 出題傾向

研究を進める中で、大学入試問題において、場合の数に関する入試問題より、確率に関する入試問題の方が多いと感じたため、以下の3項目に分けて分析する。

- (1) 確率に関する様々な問題
- (2) 確率と漸化式に関する問題
- (3) 場合の数に関する問題

それぞれにおいて、入試問題を複数取り上げ、出題のねらいを分析していきたい。

※問題文を一部省略して掲載している問題もある。

3 問題の分析

- (1) 確率に関する様々な問題

教科書の表題でいう、確率の基本性質・独立試行・反復試行に関する問題を扱った入試問題を取り上げる。小問集合としての出題や、試行する回数が少なく、状況が把握しやすい問題の出題が多く見られた。

地方国公立大学では、教科書の基本的内容や教科書に準拠した問題集と同程度の難易度の出題が多く見られた。対策として、難しい入試問題をたくさん解くのではなく、基本事項の確実な理解と、その定着を図ることが必要と感じた。

【愛媛大学 全学部】

赤球4個、青球3個、緑球2個、白球1個が入っている袋から同時に2個の球を取り出す。

- (1) 取り出した2個の球が同じ色である確率
- (2) 取り出した2個の玉のうち、少なくとも1個が赤球または青球である確率

【大分大学 理系】

AさんとBさんは赤、青、黄、緑の4枚のカードが入っている箱をそれぞれ持っている。同時に1枚ずつ取り出し、同じ色が出たら、ゲームを終了する。ただし、引いたカードは戻さない。 k 枚出した時点で終了する確率を P_k とする。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) P_2 を求めよ。
- (3) P_3 を求めよ。

【高知工科大学 理系】

白玉7個、赤玉5個が入っている袋から、玉を同時に3個取り出すとき、白玉2個と赤玉1個が出る確率を求めよ。

【福岡教育大学 教育(初等-理数)】

1個のさいころを繰り返し投げるゲームを行う。1の目が2回出た時点でゲームは終わる。このとき、ゲームが終わった時点でさいころを投げたか数が n である確率を p_n とする。 n は2以上の整数とする。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) p_n を求めよ。
- (3) $p_n = p_{n+1}$ となる n を求めよ。

【解答】 略

いわゆるブロック大レベルの大学では、文系学部と理系学部で問題を変更し出題するなど、確率の問題を考える上で必要な思考力を、大学側が強く求めていると感じた。文系学部では、確率の分野のみでの出題が多く、難易度は高くても、複合的な知識を問う問題は多くなかった。一方、理系学部では複合的な分野で作問し出題することで、難易度が上がっていると感じた。特に、図形分野との融合は頻出で、図示などから関係をイメージできることが必要である。

最難関国公立大学になると文理問わず、当たり前のように、分野融合問題が出題される。図形分野以外との融合も見られるため、やや苦慮するかもしれないが、状況が複雑な問題ほど基本的な知識を応用すれば、十分対応できることが多い。落ち着いて対応できれば、手も足もでないということはそれほどいわれる。

【広島大学 文系】 確率のみ

1個のさいころを3回投げ、出た目を順に a_1, a_2, a_3 とする。

- (1) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ が集合 $\{2, 5, 6\}$ と等しくなる確率
- (2) $a_1 < a_2 < a_3$ である確率
- (3) a_1, a_2, a_3 がすべて異なる確率
- (4) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ と集合 $\{2, 3\}$ が等しいとき、 $a_1=3, a_2=2, a_3=3$ である条件付き確率
- (5) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$ である確率

【概要】

(4)までは、教科書レベルの問題である。(5)は $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ のもとで、等式から a_1 に関する条件($a_1 \leq 3$)を導き、それぞれの場合について (a_1, a_2, a_3) の組を考えていく必要があるため、文系生徒にとって、完答は容易ではないと感じた。

しかし、基本事項が理解できていれば、(4) までは十分対応できる問題である。

【広島大学 理系】 確率と極限 (数学Ⅲ)

n を自然数とする。 $(3n+1)$ 個の箱 $A_1, A_2, \dots, A_{3n+1}$ があり、1 から $3n+1$ までの各自然数 k に対して、 k 番目の箱 A_k には、1 から k までの整数が一つずつ書かれた k 枚のカードが入っている。これを初期状態とする。

- (1) 箱 A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 L を n を用いて表せ。
- (2) 箱 $A_1, A_2, \dots, A_{3n+1}$ に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 M を n を用いて表せ。
- (3) 初期状態から、箱 $A_1, A_2, \dots, A_{3n+1}$ に入っているすべてのカードを箱 B に移す。箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき、カードに書かれた整数が (2) で求めた値 M に等しくなる確率を $P(n)$ とする。 $P(n)$ を n を用いて表せ。
- (4) M を (2) で求めた値とする。初期状態から、箱 $A_M, A_{M+1}, \dots, A_{3n+1}$ だけ集めて、ケース C に収納する。ケース C から一つ箱を選び、さらにその箱から 1 枚のカードを取り出す。カードに書かれた整数が M に等しいとき、そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率を $Q(n)$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} nQ(n)$ を求めよ。

【概要】

$(3n+1)$ 個の箱が設定がされる問題はあまりないため、個数や項数などの文字の理解が十分にできていない生徒には、始めから苦勞する問題だと感じた。しかし、(3) までは決して複雑な設定ではなく、確実に解きたい問題である。

(4) では、条件付き確率を求めるために必要な 2 つの事象の確率をしっかりと設定し、求めていくことが求められる。その際の言語化や記号の設定を丁寧に行い、抜けなく整理していく必要があると感じる。

【千葉大学 文系】 確率のみ

- (1) 1 個のさいころを 4 回投げるとき、出る目の総和が 21 以上になる確率
- (2) 1 個のさいころを 5 回投げるとき、出る目の総和が 10 以上になる確率

【概要】

すべてのパターンを求め、それぞれの目の出方を地道に計算していくのみである。基礎的知識があれば十分対応できる問題である。(1), (2) ともに、ある数以上となる確率だが、(2) では余事象の確率を使う方が易しいと判断できるようにしたい。

【千葉大学 理系】 確率のみ

さいころを投げて、座標平面上の点 P を動かす試行を繰り返す。… (略)

n 回目の試行直後の点 P の座標を (x_n, y_n) とするとき、

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となる確率
- (2) $y_6 = 0$ となる確率
- (3) $y_1, \dots, y_5$ がすべて 0 以上で、かつ $y_6 = 0$ となる確率

【概要】

(1), (2) は教科書レベルの問題である。(3) は y_5 のときの状況で場合分けを行い、6 回目の目の出方を考える問題である。また、 y_1 から y_5 がすべて 0 以上という条件もあるため、やや計算は煩雑となる。丁寧にすべての可能性をつぶしていく必要があるため、時間はかかる問題という印象である。しかし、特

別な知識は要しない問題であるため、入試問題演習で学力を付けていけば問題ない。

枝分かれさせて合計回数に注目させる方法 (最短経路の問題でよく見る手法) を活用し、目の出方の総数を調べてもよい。

【横浜国立大学 文系】 確率のみ

箱に白いカード 4 枚、黒いカード 3 枚が入っている。以下の操作 I から IV を順に 1 度ずつ行う。… (略)

- (1) 操作Ⅲを終えたときに箱の中に入っている白いカードが 3 枚である確率
- (2) 操作Ⅲを終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数と、操作Ⅳを終えたときに箱の中に入っている黒いカードの枚数が同じである確率
- (3) 操作Ⅳを終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数が 4 枚であったという条件のもとで、操作Ⅲを終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数が 3 枚である条件付き確率

【概要】

問題文を省略した部分には、操作のことと、具体例が記載されている。問題文が長くなるが、例も示されており、整理が適切にできれば、それほど難しくない。各問いに対しても、起こり得るパターンをすべてあげ、それぞれの確率を求めていけばよい問題である。やや時間は要すると思われるが、計算力よりも読解力が求められた問題と感じる。

【横浜国立大学 理系】 確率 (とベクトル)

1 個のさいころを 3 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3 とする。 xy 平面上の点 A_1, A_2, A_3 を

$$A_k \left(\cos \left(\frac{2n_k \pi}{5} \right), \sin \left(\frac{2n_k \pi}{5} \right) \right) \quad (k=1, 2, 3) \quad \text{とする。}$$

- (1) 点 A_1, A_2, A_3 がすべて一致する確率
- (2) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になる確率
- (3) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になるという条件のもとで、 n_1, n_2, n_3 がすべて奇数である条件付き確率

【概要】

問題文にベクトルが含まれるが、ベクトルの知識はほとんど使わなくても解くことができる。出た目が 1 と 6 のときは点が一致することに注意してまとめていきたい。

図形的に整理し、平行となり得る条件をおさえることができれば、それほど難しい問題ではない。基本的な確率の知識で十分対応できる。

【神戸大学 文系】 確率と平面図形

1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき、出た目の順に a, b とおく、座標平面上の 2 点 A, B を

$$A \left(\cos \frac{a}{6} \pi, \sin \frac{a}{6} \pi \right), B \left(\cos \frac{b+6}{6} \pi, \sin \frac{b+6}{6} \pi \right)$$

とする。

- (1) 3 点 O, A, B が一直線上にある確率
- (2) 3 点 O, A, B が一直線上になく、かつ三角形 OAB の面積が $\frac{1}{4}$ 以下である確率
- (3) 2 点 A, B 間の距離が 1 より大きい確率

【概要】

$a=1, \dots, 6, b=1, \dots, 6$ における各点は、重なること

がないため、半径 1 の円上に図示することで、位置関係が把握しやすい。位置関係が分かれば、条件をみtas 点が分かるため、計算に移行できる。計算自体は決して煩雑ではない。

【九州大学 理系】 確率と整式

1 個のさいころを 3 回投げ、出る目を順に a, b, c とする。

整式 $f(x)=(x^2-ax+b)(x-c)$ について

- (1) $f(x)=0$ をみたす実数 x の個数が 1 個である確率
- (2) $f(x)=0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個である確率

【概要】

確率以外の知識を活用したのは、解の個数のための条件と判別式の部分だけで、利用法も基本的な活用である。ひるまず、ひとつずつ丁寧に処理したい。 a, b の値とそれに対応する判別式 D の値を、表などを用いて整理すれば、ただだか 36 通りなので、それほど難しくないので、

〈参考 $D=a^2-4b$ の値〉

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	-3	0	5	12	21	32
2	-7	-4	1	8	17	28
3	-11	-8	-3	4	13	24
4	-15	-12	-7	0	9	20
5	-19	-16	-11	-4	5	16
6	-23	-20	-15	-8	1	12

(2) 確率と漸化式に関する問題

最難関国公立大での出題が目立った。大きく 2 つのパターンに分けて分析する。

ア 問題文が長く、立式のために情報の整理を要する問題
【大阪公立大学 工学部】

自然数 n に対し、時刻 0 から n 秒後を時刻 n と定める。正四面体の頂点 A, B, C, D を 1 秒ごとに移動する点 P を考える。点 P の時刻 0 での位置は頂点 A であり、時刻 $n-1$ から時刻 n になったとき、点 P の位置は次の規則に従って決まるものとする。

〔規則〕

- ・位置を変えず同じ頂点にいる確率は p である。
- ・位置を変えて他のそれぞれの頂点に移動する確率はどれも $\frac{1-p}{3}$ である。

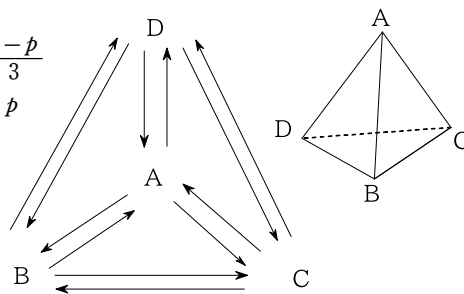
ただし、 p は $0 < p < 1$ を満たす実数である。例えば、時刻 1 に点 P の位置が頂点 A にある確率は p で、頂点 B, C, D にある確率はそれぞれ $\frac{1-p}{3}$ となる。時刻 n に点 P の位置が頂点 A である確率を a_n とする。

- (1) $p=\frac{1}{5}$ のとき、 a_3 の値を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n と p を用いて表せ。
- (3) a_n を n と p を用いて表せ。
- (4) 点 Q は時刻 0 での位置が頂点 B であり、点 P と同時に〔規則〕に従って頂点 A, B, C, D を 1 秒ごとに移動する。点 P と点 Q の位置の決め方は互いに影響を受けず、2 点の位置が同じである場合もあるとする。時刻 n に点 P の位置と点 Q の位置が同じである確率を x_n とし、

$b_n=\frac{1-a_n}{3}$ とおく。 x_n を b_n を用いて表せ。

【解答】

→: $\frac{1-p}{3}$
移動なし: p



$a_1=p$ である。

〔規則〕より、 $a_{n+1}=\frac{4p-1}{3}a_n+\frac{1-p}{3} \dots \textcircled{1}$

- (1) 略
- (2) $\textcircled{1}$ が解である。
- (3) $\textcircled{1}$ の漸化式を特性方程式を利用して解く。

$$a_n=\frac{3}{4}\left(\frac{4p-1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$$

- (4) 点 P と点 Q の位置の決め方は独立なので、時刻 n に点 P と点 Q の位置が各頂点である確率は以下の表のようになる。

	頂点A	頂点B	頂点C	頂点D
点 P	a_n	b_n	b_n	b_n
点 Q	b_n	a_n	b_n	b_n

$$b_n = \frac{1-a_n}{3} \text{ より, } a_n = 1-3b_n$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } x_n &= a_n \cdot b_n + b_n \cdot a_n + b_n^2 + b_n^2 \\ &= 2b_n(1-2b_n) \end{aligned}$$

上記の大阪公立大学の問題は、問題文が長い、情報が適切に整理できれば、(3)までは、教科書の内容が理解できていれば、十分対応できる。(4)についても、表などを使い対応が分かるようにすれば、それほど苦勞しないと感じる。

問題文中に必要な情報に線を引いたり、抜き出して書いてまとめたりして、落ち着いて情報を処理したい。その中で、図や表を使い、視覚的に状況を整理していくことも必要だと感じた。

イ 連続する2項の関係ではなく、1つとばした項の関係式が立式され、 n が偶数のときと奇数のときで考え方を分ける問題

【京都大学 理系 第6問】

n は2以上の整数とする。1枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき、 k 回目($1 \leq k \leq n$)に表が出たら $X_k=1$ 、裏が出たら、 $X_k=0$ として、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を定める。

$$Y_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1} X_k$$

とすると、 Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。

【解答】

Y_n の偶奇と X_n の値に注目して、次の4つの事象を考える。

$A_n: Y_n$ が奇数、かつ、 $X_n=1$

$B_n: Y_n$ が奇数、かつ、 $X_n=0$

$C_n: Y_n$ が偶数、かつ、 $X_n=1$

$D_n: Y_n$ が偶数、かつ、 $X_n=0$

また、事象 A_n, B_n, C_n, D_n が起こる確率を順に

a_n, b_n, c_n, d_n とする。

事象 A_{n+1} が起こるのは、

・ B_n が起きて、かつ、 $X_{n+1}=1$ のとき

・ C_n が起きて、かつ、 $X_{n+1}=1$ のとき の2パターン

$$\text{よって, } a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に, } b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \dots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n \dots \textcircled{3}$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n \dots \textcircled{4} \quad \text{も成り立つ。}$$

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1 \text{ なので, } a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

また、事象 A_2 が起こるのは $(X_1, X_2)=(1, 1)$ のときで、

事象 C_2 が起こるのは $(X_1, X_2)=(0, 1)$ のときだから、

$$a_2 + c_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, } a_n + c_n = \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{これと}\textcircled{1}\text{から, } a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4} \text{ となるので,}$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) + \frac{1}{4} \quad (n \geq 3) \text{ となり,}$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \quad (n \geq 2) \text{ となるため,}$$

$$p_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \text{ と変形できる。}$$

したがって、 n の偶奇に注意して、

$$p_n - \frac{1}{2} = \begin{cases} \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n:\text{偶数}) \\ \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

Y_2 が奇数となるのは、 $(X_1, X_2)=(1, 1)$ のときで、

$Y_3 = X_1 X_2 + X_2 X_3$ が奇数となるのは

$(X_1, X_2, X_3)=(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ のときより、

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{4}$$

ゆえに、2以上の整数 n に対して

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} & (n:\text{偶数}) \\ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

2025年入試では、上記の京都大学以外に、東京大学(文系)、一橋大学、大阪大学(理系)などでも出題されている。上記の問題は、求める変数が奇数になるときを問われているため、偶数の場合と奇数の場合で組み合わせを考える必要があるとの思考にいたることは、十分に可能だと感じた。そこからどのように場合分けをしていくかは難しいが、場合分けをするという発想がなければ、解答を進めていくこと自体が難しいため、問題文から手がかりを得、解答を進めていきたい。一方で、関係性を整理していく中で、偶数のときと奇数のときで起こり方が異なることに気づき、場合分けをしていく問題では、深い思考力と判断力が問われる。普段の演習から、偶数と奇数での場合分けや3の倍数での場合分けによる漸化式の立式をしていく問題に多く触れ、対応力を磨いておきたい。

(3) 場合の数に関する問題

場合の数に関する出題は、数え上げによって対応されては出題意図に合致しないため、その解法での対応が難しい問題が多かった。その問題独自の数値を設定したり、馴染みのない数値を紹介したりし、それに基づく問題を解かせたりする大学が見られた(以下に示した3大学など)。また、問題文を長くしたり、文字を多く用いたりし、状況を複雑にする問題も見られ、全体的に難易度が高い問題が多いと感じた。

【徳島大学 医学部等】

n を 3 以上の整数とする。3 つの整数 a, b, c ($1 \leq a < b < c \leq 2n$) に対して、 $p = b - a$, $q = c - b$ とする。 $\langle a, b, c \rangle$ の値を $p \geq q$ ならば $\langle a, b, c \rangle = p$ とし、 $p < q$ ならば $\langle a, b, c \rangle = q$ とする。 $(2n - 2)$ 以下の自然数 k に対して、 $\langle a, b, c \rangle = k$ となる 3 つの整数 a, b, c ($1 \leq a < b < c \leq 2n$) の選び方の総数を $S(k)$ とする。

(1) $n = 3$ のとき、… (略)

(4) $k = 1, 2, 3, \dots, 2n - 2$ に対する $S(k)$ の最大値を M とする。 n が 3 の倍数のとき、 M を n を用いて表せ。

【横浜市立大学 理系】

正の整数について、各位の数字を逆の順番に並べて得られる数もとの数と同じになる数を回文数という。

すなわち、正の整数に対して、 n 桁の正の整数

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \times 10^{i-1} \text{ (ただし, } a_i = 0, 1, \dots, 9 \text{ であり } a_n \neq 0 \text{)}$$

について、 $a_{n+1-i} = a_i$ がすべての $i = 1, \dots, n$ に対して成り立つときに、 x を回文数という。これによると、たとえば、11, 212, 1001 などのような数や 1, 2, $\dots$, 9 のような一桁の数は回文数であるといえる。

(1) 小さい方から数えて 19 番目の回文数を答えよ。

(2) $101 \leq N \leq 9999$ をみたす回文数の個数を求めよ。

(3) N を正の整数とするとときに、 10^{2N} より小さな回文数の個数を N を用いて表せ。

(4) 小さい方から数えて 2025 番目の回文数を答えよ。

【東京医科歯科大学】

xy 平面において、 x 座標および y 座標が共に整数であるような点を格子点と呼ぶ。 xy 平面上の相異なる 2 つの格子点を端点とする折れ線のうち、 x 座標または y 座標が等しい格子点どうしを結ぶ線分のみから構成され、かつ同じ点を 2 度通ることのないものを、格子折れ線と呼ぶ。ここで、格子折れ線の向きは考慮せず、端点および通過する点がすべて等しい格子折れ線は同じものとする。また、自然数 n に対し、

$$0 \leq x \leq n \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1$$

を満たす格子点全体の集合を V_n とする。さらに V_n に属する格子点をすべて通り、かつ V_n に属さない格子点は通らない格子折れ線全体の集合を L_n とする。例えば、7 つの格子点 $(0, 1), (0, 0), (1, 0), (1, 1), (4, 1), (4, 0), (2, 0)$ を順に結んだ折れ線は L_4 に属する。

(1) L_1 および L_2 に属する格子折れ線をすべて図示せよ。

(2) L_4 に属する格子折れ線のうち、両端点の x 座標の差が 3 以上となるものをすべて図示せよ。

(3) 以降略

【解答】 略

これらの問題は、問題文に具体例が示されることが多く、その上で (1) の問いで、 $n = 1$ のときなどの具体例を答えさせる問題から入ることが多い。具体例を通して条件を理解し、パターン化できるかが問われている。手を動かすことを厭わず、様々な状況を考えていく必要がある。

最後に、状況を整理するのが難しく、解答の作成に苦慮する

問題として、東京大学の問題を取り上げる。

【東京大学 理科系】

n は 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり、横一列におかれている。1 以上 $(n - 1)$ 以下の整数 i に対して、次の操作 (T_i) を考える。

(T_i) 左から i 番目の札の数字が、左から $(i + 1)$ 番目の札の数字よりも大きければ、これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \dots, A_n$ であったとする。この状態から $(n - 1)$ 回の操作 $(T_1), (T_2), \dots, (T_{n-1})$ を順に行った後、続けて $(n - 1)$ 回の操作 $(T_{n-1}), \dots, (T_2), (T_1)$ を順に行ったところ、札の数字は左から 1, 2, $\dots, n$ と小さい順に並んだ。

(1) A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の総数を c_n とする。 n が 4 以上の整数であるとき、 c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

【概要】

決まり切った解法がなく、思考力が試される問題である。普段から手を動かすことと、言語化する習慣があることが求められる。抜けがないようにパターンを列挙する手法を、普段から様々な問題で試しておく必要があるが、それでもあまり類似する問題がなく、答えにたどり着くことが難しい問題である。

4 まとめ

予想通り、多くの大学で出題されており、受験において対策をしっかりとしておく必要性を感じた。一方で、文系学部においては、基礎的知識がしっかり理解できていれば、難関大学であろうと予想よりも得点できる印象をもった。受験対策として難しい問題にすぐに取り組むのではなく、基礎固めを着実にやってから入試問題に取り組むよう指導することが大切と感じた。

理系学部では、難関大となると偶数・奇数の場合分けなど、文字の処理に慣れていることが欠かせないと感じた。普段から、式で終わらせるだけでなく、言葉で説明を書いたうえで計算していく習慣を付けさせたい。また、状況を整理する力も問われていることが多い。長文の問題文も増えているため、情報を正しくまとめ、立式に繋げる力も必要されている。共通テストでも同様の力が問われているため、日頃から読解力を鍛えておく必要性も感じた。

起こり得るすべてのパターンを考慮し、抜けなくそれらの関係を見出し、立式するという思考は社会課題を解決していく上で、求められる能力の 1 つだと思う。そのため、多くの大学が出題しているのではないかしらと思うし、今後も出題される傾向は続く予想される。この大学側の傾向を 1 年次に学ぶ際から意識させ、基礎的知識をまず確実に定着させることを意識したい。また、教科書レベルの内容を理解すれば、挑戦できる入試問題も多くあることが分かったので、学習終了後に取り組ませ、1 つのゴールとして意識させることも有効であると感じたので、今後実践してみようと思う。

5 参考文献

全国大学入試問題正解 2026/2025/2024 年度受験用