

国公立大学の入試問題の研究

－ 難関大学の入試問題（理系） －

愛媛県立宇和島東高等学校 赤松 弘教

1 はじめに

昨年度から新しい形式での共通テストが始まった。やはり数学ⅠAにおいて、整数の出題が無くなった変化は大きい。しかしながら、個別試験においては多くの大学で出題されている。新入試を迎えた昨年度を振り返ったところ、難関大学の理系学部合格のカギは数学にあるのではないだろうか。

研究を通して、理系生徒に必要な数学の力を理解し、ポイントを抑えた授業実践につながると考え、本研究のテーマを設定した。

2 出題内容一覧

今回の研究にあたり、難関大学である9大学の2021年度から2025年度の5年間の入試問題について、出題内容をまとめた。（ただし、東京科学大学について、昨年度以前の問題は東京医科歯科大学と東京工業大学の出題を掲載してある。）

【北海道大学】

問題	2025年	2024年	2023年
1	数列・指数・対数関数	式と曲線	複素数平面
2	図形と方程式・2次曲線	確率	ベクトル
3	積分・極限	数列・積分	微分
4	複素数平面	ベクトル	確率
5	場合の数	微・積分	微分

問題	2022年	2021年
1	2次関数	ベクトル
2	ベクトル・数列	微分
3	微・積分	指数・対数関数・微分
4	確率	数列
5	複素数平面	微・積分

【東北大学】

問題	2025年	2024年	2023年
1	確率	微・積分	確率
2	三角関数・極限	対数関数	三角関数・極限
3	数列	確率・数列・複素数平面	数列
4	複素数平面	ベクトル	複素数平面
5	ベクトル	積分	ベクトル
6	微・積分	微・積分	微・積分

問題	2022年	2021年
1	場合の数	2次関数・図形と方程式
2	微分	図形と方程式・整数の性質
3	微分・極限	場合の数
4	図形と方程式・極限	図形と方程式・微・積分
5	ベクトル・数列・極限	複素数平面・微分
6	積分	積分

【東京大学】

問題	2025年	2024年	2023年
1	積分	図形と方程式・ベクトル	積分
2	積分	積分	確率
3	三角関数	確率	図形と方程式・微分
4	整数	図形と方程式・微分	空間ベクトル
5	場合の数	積分	式と証明
6	複素数平面	整数の性質	図形・積分

問題	2022年	2021年
1	微・積分	図形と方程式
2	数列・整数	複素数平面
3	図形と方程式・微分	微・積分
4	図形と方程式・積分	整数
5	図形・積分	微分
6	確率	数と式

【東京科学大学理工学系】

問題	2025年	2024年
1	積分	図形と方程式・微分
2	微分・ベクトル	微・積分
3	確率・数列・極限	図形と方程式・数列・極限
4	数列・極限	確率・数列・極限
5	微分	複素数平面

問題	2023年	2022年
1	積分	複素数平面
2	整数の性質	整数の性質
3	複素数平面・確率・数列	図形と方程式・三角関数・微分
4	積分	複素数平面・式と曲線
5	ベクトル	微・積分・極限

問題	2021年
1	場合の数・数列
2	式と曲線
3	整数の性質
4	ベクトル
5	図形と方程式・積分

【東京科学大学医歯学系】

問題	2025年	2024年	2023年
1	図形の性質・確率	整数の性質	場合の数
2	ベクトル・整数	ベクトル	ベクトル・数列・極限
3	微分	積分	積分・極限

問題	2022年	2021年
1	三角関数・ベクトル	確率
2	微・積分	微分
3	微・積分	微分

【名古屋大学】

問題	2025年	2024年
1	微分	微分・2 次関数・整数の性質
2	整数の性質	複素数平面
3	平面・空間図形・積分	ベクトル
4	整数の性質・確率	確率・積分

問題	2023年	2022年
1	複素数平面・2 次関数	式と証明・微・積分
2	微・積分	確率・整数の性質
3	微分	複素数平面
4	式と証明・確率	微・積分・極限

問題	2021年
1	微・積分
2	対数関数・高次方程式
3	確率
4	数と式・数列・図形と方程式

【京都大学】

問題	2025年	2024年	2023年
1	複素数平面・積分	確率・極限	積分・式と証明
2	整数の性質	複素数平面	ベクトル
3	微分	ベクトル	確率
4	ベクトル	数列	微分
5	ベクトル・式と曲線	微・積分・極限	微・積分
6	確率・数列	極限	三角関数・数列

問題	2022年	2021年
1	対数関数	ベクトル・確率
2	確率	微分
3	整数の性質	極限
4	ベクトル・図形の性質	積分
5	微・積分	図形と方程式
6	数列	整数の性質・微分

【大阪大学】

問題	2025年	2024年
1	ベクトル	極限・微分
2	図形と方程式・微分	複素数平面・図形と方程式
3	ベクトル・積分	ベクトル
4	極限・積分	積分・図形と方程式
5	確率・数列	整数の性質・集合と論理

問題	2023年	2022年
1	極限・積分・数列	複素数平面
2	ベクトル・図形と方程式	三角関数・集合と論理・方程式
3	微分	図形と方程式
4	ベクトル・図形と方程式	極限・微分
5	確率・整数の性質	式と曲線・積分

問題	2021年
1	微分
2	ベクトル
3	微・積分・極限
4	整数の性質・積分
5	微分・三角関数

【神戸大学】

問題	2025年	2024年	2023年
1	微分	微分・数列	数列
2	数列・式と証明	図形と方程式	2 次方程式
3	微・積分	確率	確率
4	ベクトル	空間座標・積分	ベクトル
5	微・積分	積分	微・積分

問題	2022年	2021年
1	数列・極限	整数の性質・数列
2	数列・極限	積分
3	微・積分	ベクトル
4	2 次曲線・図形と方程式	図形と方程式
5	指数・対数関数・整数の性質	微・積分

【九州大学】

問題	2025年	2024年	2023年
1	ベクトル	微分	複素数平面
2	微・積分	複素数平面	極限
3	整数の性質	整数の性質	ベクトル
4	図形と計量	場合の数	微分
5	確率	積分	微・積分

問題	2022年	2021年
1	ベクトル	ベクトル
2	極限	複素数平面
3	整数の性質	微・積分
4	微・積分	複素数平面
5	式と曲線	整数の性質

過去 5 年間の統計として、出題が多かった分野（上位 7 つまでは、以下のとおりである。

「微分法・積分法」（110 題），「ベクトル」（38 題），「場合の数・確率」（36 題），「数列」（30 題），「整数の性質」（26 題）「極限」・「図形と方程式」（25 題），「複素数平面」（23 題）

共通テストから出題が消えた「整数の性質」について、昨年度だけで 5 大学（9 大学中）で出題があるため、整数の性質についての理解も必須である。

また、もう 1 つ特徴的であったのは、1 つの分野単体でなく、複数の分野と複合した出題が多い。ただ知識を問うような問題ではなく、思考力を問う問題が多いように感じた。さらに、答案を書く中で、その理由や論理を組み立てていくことも重要であると感じた。解答として自らの考えを原理・原則に基づいて解法を論理的に記述する力が求められているのではないだろうか。昨年度の問題の中から、これらについていくつか取り上げる。

3 具体的な出題内容①（微分法・積分法）

最も出題が多い分野である「微分法・積分法」についての攻略は必須事項ではないだろうか。まず、教科書で学習するような基礎的な問題であるが、思考力を問える問題と私が以前に出題した定期考査の問題が類似していたので、取り上げる。

<2025 年 東北大学 前期日程 第3問>

a を実数とし、関数 $f(x)$ を次のように定める

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき、

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ
- (2) 関数 $f(x)$ が $x=0$ で極大値をもつような a の値のとり得る範囲を求めよ

(略解)

- (1) $f'(x) = 2x(2x^2 + 2ax + a + 2)$
 $g(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ とおく
 $f(x)$ が極大値を持つ
 $\Leftrightarrow f'(x)$ の符号が正から負へ変化する
 $\Leftrightarrow y = f'(x)$ が x 軸と異なる3点で交わる (x^3 の係数が正)
 $\Leftrightarrow g(x) = 0$ が異なる2つの0でない実数解をもつ
ゆえに、 $g(0) \neq 0$ かつ $a^2 - 2a - 4 > 0$
したがって、 $a < -2$, $-2 < a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$
- (2) $f(x)$ が $x=0$ で極大値を持つ
 $\Leftrightarrow y = f'(x)$ と x 軸の交点のうち、小さい方から2番目が0
 $\Leftrightarrow g(x) = 0$ が正の解と負の解をもつ
ゆえに、 $g(0) < 0$ から、 $a < -2$

教科書に載っている基本事項であるが、導関数とは何かというものを体系的に理解できているかが重要である。思考力を問うためには難しい問題を解くだけでなく、このような問題でも本質を理解できているかを図ることができる。

以下、定期考査に出題した問題を掲載する。

□ に当てはまる適当なものを1つずつ【選択肢】から選べ。【思考・判断・表現】

- (1) 2次関数 $f(x)$ が $x=2$ で極小値6をとるための必要十分条件は「□」かつ「□」かつ「 $x < 2$ における $f'(x)$ □ 0 かつ $x > 2$ における $f'(x)$ □ 0」である。
【選択肢】① $f(2)=0$ ② $f(2)=6$ ③ $f'(2)=0$ ④ $f'(2)=6$
⑤ $>$ ⑥ $<$
- (2) 関数 $f(x) = x^3 + kx^2 + 3(k-2)x + 2$ において、 $f'(x) = 0$ の判別式を D とする。ただし、 k は定数とする。関数 $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は「□」である。また、関数 $f(x)$ が常に増加するための必要十分条件は「□」である。
【選択肢】① $D > 0$ ② $D \geq 0$ ③ $D < 0$ ④ $D \leq 0$
- (3) 3次方程式 $f(x) = 0$ において、 $f'(x) = p(x - \alpha)(x - \beta)$ とする。ただし、 p は定数、 α, β は実数で、 $\alpha \neq \beta$ である。このとき、方程式 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつための必要十分条件は「□」のときである。
【選択肢】① $f(\alpha) > 0$ ② $f(\beta) > 0$ ③ $f(\alpha)f(\beta) > 0$ ④ $f(\alpha)f(\beta) < 0$
- (4) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ において、関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は、以下の【i】または【ii】のときである。
【i】「□」
【ii】「□」かつ $f'(x) = 0$ が異なる□個の実数解をもつ
【選択肢】① $a < 0$ ② $a > 0$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2 ⑥ 3

次に、定数分離の問題を応用した問題を取り上げる。

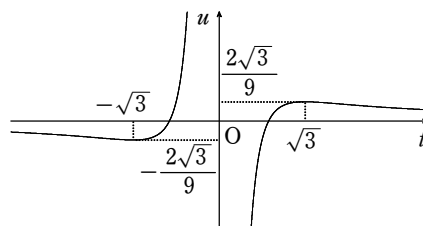
<2025 年 東京科学大学 前期日程 第5問>

- (1) 関数 $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3}$ ($t \neq 0$) の増減を調べ、グラフの概形をかけ

- (2) 実数 x, y, z が条件
$$\begin{cases} x < y < z \\ xyz \neq 0 \\ x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3 \\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 \end{cases}$$
を満たしながら動くとき、 x がとり得る値の範囲を求めよ

(略解)

(1)



- (2) $x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 1}{y^3} = \frac{x^2 - 1}{x^3} \Leftrightarrow f(y) = f(x)$

同様に、 $y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 \Leftrightarrow f(z) = f(y)$

よって、条件は実数 x, y, z が、①、②を満たすことである

$$\begin{cases} f(x) = f(y) = f(z) & \dots \text{①} \\ x < y < z & \dots \text{②} \end{cases}$$

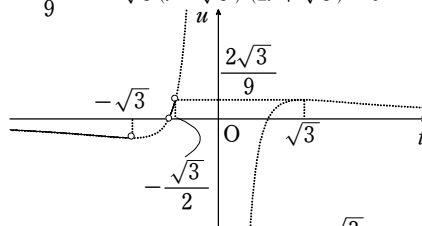
$f(x) = k$ とすると、 x, y, z は tu 平面において $u = f(t)$ のグラフと $u = k$ の交点の t 座標として求められる

①、②を満たす x, y, z が存在するには

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9} < k < 0, \quad 0 < k < \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ であり,}$$

x は、その3個の共有点の t 座標の最小のものである

$$f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \sqrt{3}(t - \sqrt{3})^2(2t + \sqrt{3}) = 0$$



$$\text{したがって、} x < -\sqrt{3}, \quad -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

①、②を導き、下線部を理解する必要がある。そのためには、方程式と関数の関係性を体系的に捉えることが重要である。

最後に、積分と極限の見通しを立てながら、確かな計算力を必要とする問題を取り上げる。

<2025 年 大阪大学 前期日程 第4問>

- (1) $t > 0$ のとき $-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$ が成り立つことを示せ

- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$ を示せ

- (3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \text{ を示せ}$$

(略解)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \\
 &\Leftrightarrow -\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t} \\
 (2) \quad \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx &= \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (\text{部分積分により}) \\
 (1) \text{ と, はさみうちの原理から, } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f(x) &= \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x) \text{ なので,} \\
 \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_1^t \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \int_2^{2t} \frac{\cos u}{u} \cdot \frac{dx}{du} du \right) \quad (u=2x) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx + \int_2^t \frac{\cos x}{x} dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx - \left(\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx + \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx - \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \quad ((2) \text{ より})$$

不等式の証明の基本的な知識だけでなく, 様々な積分計算の演算を積み, 習熟する必要がある。特に下線部を理解したい。

4 具体的な出題内容② (整数の性質)

まず, 共通テストでの出題はなくなったが, 個別試験には頻出である整数分野についての基本的な問題を取り上げる。

<2025 年 九州大学 前期日程 第3問>

- (1) n を整数とする。 n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ
- (2) $2^m = n^2 + 3$ を満たす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ

(略解)

- (1) k を整数とする
 - (i) $n = 4k$ のとき, $n^2 = 8 \cdot 2k^2$
 - (ii) $n = 4k \pm 1$ のとき, $n^2 = 8(2k^2 \pm k) + 1$
 - (iii) $n = 4k + 2$ のとき, $n^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4$
- (2) $2^m = n^2 + 3 \dots\dots ①$
 - ① の右边は 3 以上であるので, $m \geq 2$
 - (i) $m = 2$ のとき, ① より, $n = 1$
 - (ii) $m \geq 3$ のとき
 - ① の左辺は 8 の倍数であり
 - ① の右辺を 8 で割った余りは (1) から, 3, 4, 7 のいずれかであるので ① を満たす m, n は存在しない
 - (i), (ii) から, $(m, n) = (2, 1)$

基本的な問題ではあるが, 整数が苦手な生徒には (2) の解法が思い付きにくいかもしれない。(1) とのつながりを理解したい。

次に, 整数問題の基本である。偶数, 奇数の性質に着目する問題を取り上げる。

<2025 年 名古屋大学 前期課程 第2問>

整数 a, b, c に対し, 次の条件を考える

$$(\ast) \quad a \geq b \geq c \text{ かつ } a^2 - b^2 = c$$

- (1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 $(\ast)$ を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ
- (2) p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする
このとき, 条件 $(\ast)$ を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ

(略解)

- (1) $(a+b)(a-b) = c$
また, $a+b \geq a-b \geq 0$ ($a \geq b \geq 0$ より) かつ
 $a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致 ($(a+b)+(a-b)=2a$ より)
 $c=24$ のとき, $(a+b, a-b) = (2, 12), (4, 6)$
 $c=25$ のとき, $(a+b, a-b) = (1, 25), (5, 5)$
 $c=26$ のとき, $c=2 \cdot 13$ となり, これを満たす $a+b, a-b$ の組は存在しない (これを満たす a, b の組は存在しない)
よって, $(a, b) = (7, 5), (5, 1), (13, 12), (5, 0)$
- (2) $4p^{2n} = 2^2 \cdot p^{2n}$ で, p が 3 以上の素数なので
 $(a+b, a-b) = (2p^{2n-k}, 2p^k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$
 $(a, b) = (p^{2n-k} + p^k, p^{2n-k} - p^k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$

下線部に気が付くかどうかで (2) を解く上で重要となる。もし気が付かなくても, (1) を解く過程で気が付きたい。

最後に, 論証をどこまで正確に表現することができるかで差が付くであろう問題を取り上げる。

<2025 年 京都大学 前期課程 第2問>

正の整数 x, y, z を用いて, $N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と表される正の整数 N の最小値を求めよ

(略解)

- $$\begin{aligned}
 x &= 3k + r_1, \quad y = 3l + r_2 \text{ とおく} \\
 \text{ただし, } k, l &\text{ は整数で, } r_1, r_2 \text{ はそれぞれ, } -1, 0, 1 \text{ とする} \\
 x^6 &= (3k + r_1)^6 = 3X + r_1^6, \quad y^4 = (3l + r_2)^4 = 3Y + r_2^4 \\
 x^6 + y^4 &= 3(X + Y) + r_1^6 + r_2^4 \\
 \underline{9z^2 = x^6 + y^4 \text{ が成立するには, } r_1^6 + r_2^4 \text{ が 3 の倍数になることが}} \\
 \underline{\text{必要なので, } (r_1, r_2) = (0, 0) \text{ に限るので}} \\
 9z^2 &= x^6 + y^4 \Leftrightarrow z^2 = 3^2(3^2k^6 + l^4) \text{ となり} \\
 z \text{ も 3 の倍数なので, } z &= 3m \quad (m: \text{正の整数}) \text{ とおくと} \\
 9z^2 &= x^6 + y^4 \Leftrightarrow z^2 = 3^2(3^2k^6 + l^4) \Leftrightarrow m^2 = 9k^6 + l^4 \\
 (i) \quad k &= 1 \text{ のとき, } m^2 = 9 + l^4 \\
 \quad l &= 1 \text{ のとき, } m^2 = 10 \text{ で不適} \\
 \quad l &= 2 \text{ のとき, } m^2 = 25 \text{ から, } m = 5 \\
 (ii) \quad k &\geq 2 \text{ のとき, } m^2 = 9k^6 + l^4 > 9 \cdot 2^6 > 25 \\
 \text{したがって, } (k, l, m) &= (1, 2, 5) \Leftrightarrow (x, y, z) = (3, 6, 15) \\
 \text{のとき, } N &\text{ は最小となり, } N = 9 \cdot 15^2 = 2025
 \end{aligned}$$

$9z^2$ から, 3 で割った余りに着目することは必須事項である。下線部を明確にすることや, $(k, l, m) = (1, 2, 5)$ が最小となるという論証を正確に表現できる記述力が重要となる。

しかしながら, 答えが 2025 になるのは粋な問題である。

5 具体的な出題内容③（その他）

様々な分野から押さえておきたいポイントをいくつか取り上げる。まずは、数列についての性質を利用した問題を取り上げる。

<2025 年 北海道大学 前期日程 第1問>

α, r を $\alpha > 1, r > 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を以下のように定める
 $b_n = \log_{a_n}(a_{n+1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

- (1) b_n を n と $\log_{\alpha} r$ を用いて表せ
- (2) 等式 $b_n = \frac{n+2}{n+1}$ がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ
- (3) (2) の条件が成り立つとき、積 $a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_3 a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁, 3 桁, 4 桁になるような α の範囲を求めよ

(略解と方針)

$$\begin{aligned} (1) \quad b_n &= \frac{1 + n \log_{\alpha} r}{1 + (n-1) \log_{\alpha} r} \\ (2) \quad b_n &= \frac{n \log_{\alpha} r + 1}{n \log_{\alpha} r + 1 - \log_{\alpha} r} = \frac{n \cdot 2 \log_{\alpha} r + 1}{n \cdot 2 \log_{\alpha} r + 2 - 2 \log_{\alpha} r} \dots \textcircled{1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} \quad (2 \log_{\alpha} r = 1 \text{ とする}) \Leftrightarrow (r = \sqrt{\alpha} \text{ のとき}) \end{aligned}$$

したがって、必要十分条件は $r = \sqrt{\alpha}$

$$(\text{別解}) \quad b_n = \frac{n+2}{n+1} \text{ から, } b_1 = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } b_1 = 1 + \log_{\alpha} r \Leftrightarrow \log_{\alpha} r = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\alpha}$$

- (3) 指数・対数関数の性質を用いて不等式で表す

もちろん逆の証明は必要である。式変形から条件を見付けられれば良いが、別解のように数列において初項という特定のものをを用いて条件を見付け出すことは重要事項ではないだろうか。

次に、個別試験でよく見られる 36° の問題を取り上げる。

<2025 年 東北大学 前期日程 第6問>

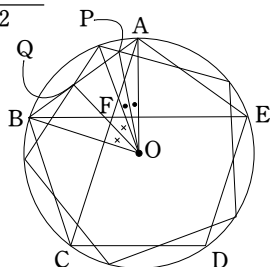
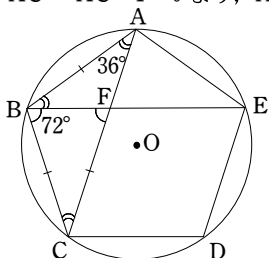
1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする

- (1) K の対角線の長さを求めよ
- (2) K の周で囲まれた図形を P とする
 また、 P を K の外接円の中心の周りに各 θ だけ回転して得られる図形 P_θ とする。 P と P_θ の共通部分の周の長さを l_θ とする。 θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき、 l_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ

(略解と方針)

- (1) $\triangle ABC \sim \triangle AFB$ なので、 $1 : (AC-1) = AC : 1$ から

$$AC^2 - AC - 1 = 0 \text{ より, } AC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



- (2) 周の長さは $10PQ$

(方針 1)

O から PQ に垂線を下ろして正接の定義から立式し、三角関数の微分法を用いて最小値を導く

(方針 2)

$\triangle OAP$ に着目し、正弦定理を用いて OP を立式した後、 $\triangle OPQ$ に着目し、正弦定理を用いて PQ を立式して、三角関数の性質から最小値を導く

正五角形の作図問題は教科書に記載もある基本事項であり、相似から 36° の導出は必須である。(2) はしっかりと図示し、何を求めるかを明確にすることで方針が定まるのではないだろうか。

次に、教科書レベルの基本的な要素から論述を丁寧に行う必要がある整数問題を取り上げる。

<2025 年 東京大学 前期日程 第4問>

0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ

a を正の定数とし、 $f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく

- (1) n を正の整数とする
 $f_a(x)$ が平方数ならば、 $n \leq a$ であることを示せ
- (2) $f_a(x)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく
 次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ
 (i) $N_a = 1$ である (ii) $4a + 1$ は素数である

(略解と方針)

$$(1) \quad f_a(x) = k^2 \Leftrightarrow n^2 + n - a = k^2$$

$$\Leftrightarrow (2n+1+2k)(2n+1-2k) = 4a+1 \dots \textcircled{1}$$

$n > a$ と仮定する

$n = k$ とすると、 $n = a$ となり仮定に反するので、 $n \neq k$

$n < k$ とすると、 $\textcircled{1}$ の左辺は負となりおかしいので、 $n > k$

$$4a+1 = (2n+1+2k)(2n+1-2k)$$

$$\geq (2n+1+0) \cdot 2 \geq 4a+2 > 4a+1 \text{ となり、矛盾する}$$

したがって、 $n \leq a$

- (2) N_a は $\textcircled{1}$ を成り立たせる (n, k) の個数

$\Leftrightarrow lm = 4a+1$ を成立させる正の整数の組 (l, m) の個数を用いて、論述を展開する

問題「 $\sqrt{n^2 - 19}$ が整数となる正の整数 n をすべて求めよ」を $n^2 - 19 = k^2 \Leftrightarrow (n+k)(n-k) = 19$ という解法は周知であるが、同じ問題と捉えられただろうか。体系的な学習が必要である。

最後に逆の証明が重要で難解なベクトルの問題を取り上げる。

<2025 年 京都大学 前期日程 第4問>

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面にないとする
 s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L, 直線 OB 上の点 M, 直線 OC 上の点 N を次が成り立つようにとる

$$\overrightarrow{OL} = s\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON} = u\overrightarrow{OC}$$

- (1) s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 L, M, N の定める平面 LMN は、 s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ
 さらに、そのような点 P はただ 1 つに定まることを示せ
- (2) 四面体 OABC の体積を V とする。(1) における点 P について、四面体 PABC の体積を V を用いて表せ

(略解と方針)

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \frac{x}{s}\overrightarrow{OL} + \frac{y}{t}\overrightarrow{OM} + \frac{z}{u}\overrightarrow{ON}$$

点 P は平面 LMN 上にあるので、 $\frac{x}{s} + \frac{y}{t} + \frac{z}{u} = 1 \dots\dots ①$

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4 \text{ から, } \frac{1}{4s} + \frac{2}{4t} + \frac{3}{4u} = 1 \dots\dots ②$$

② を満たす (s, t, u) が常に ① を満たす…… ③ を考えると

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ は, } ③ \text{ を満たす}$$

逆に、自然数 n に対して、 $\frac{2}{4n} + \frac{3}{4n} = \frac{5}{4n} \neq 1$ なので

$$\frac{1}{4s_n} + \frac{2}{4n} + \frac{3}{4n} = 1 \text{ を満たす実数 } s_n \text{ は, ただ一つに定まり}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4} \text{ である}$$

(x, y, z) が ③ を満たすには、任意の自然数 n に対して

$$\frac{x}{s_n} + \frac{y}{n} + \frac{z}{n} = 1 \text{ が成り立つことが必要で, } n \rightarrow \infty \text{ とすると}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ が必要で, 同様にして, } y = \frac{2}{4}, z = \frac{3}{4} \text{ も必要である}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OQ} \text{ から, } OQ : QP = 2 : 1$$

したがって、求める四面体 PABC の体積は、 $\frac{1}{2}V$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} \text{ を求めることはある程度容易で}$$

あるが、下線部にあるように逆にその 1 点しかないことの証明は

$$\text{難しい。} \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ とせず, } \overrightarrow{LP} = x\overrightarrow{LM} + y\overrightarrow{LN}$$

$$\text{とおき, } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} \text{ から証明したほうが, ただ 1 つの点で}$$

あるという逆の論述は証明しやすいように感じる。

6 まとめ

今回取り上げた各項目について、微分法・積分法に関しては、積分計算の演算を多く積み、様々な解法を習得し、見通しを立てる力が必要であると感じた。整数問題については、教科書の基本を理解し、難しく見えても原理・原則から解法を導く練習を繰り返し行い、なぜそのような変形になるのかをしっかりと理解する必要がある。論証問題については、定理を用いた計算演習だけでなく、定義からの理解を平素の授業においても大切にしたい。

定理を教え、解き方を教授する授業スタイルでは、今後の入試に対応することは難しい。教科書レベルの問題において、解き方を暗記するのではなく、原理・原則に基づき、体系的な学習を通して本質的な理解をすることが、思考力の向上には不可欠であるように感じた。平素の授業から「なぜ」を大切にし、諸事象を体系的に捉え、分野や教科等を横断して多角的に深く考察することでこれから求められる数学の力を上げられるのではないだろうか。

7 参考文献

全国大学入試問題正解 [5] 数学国公立大編 (2021~2026 年受験用)
(旺文社)

大学赤本シリーズ (2021~2026 年版) (数学社)
(北海道・東北・東京・東京科学・名古屋・京都・大阪・神戸・九州)