

国公立大学入試問題の研究—数列と極限—

愛媛県立新居浜西高等学校 益田 誠治

1 はじめに

国公立大学の入試において「数列と極限」は、数学Bおよび数学Ⅲの重要単元として頻繁に出題されており、特に論理的思考力と計算力を問う問題が多く、融合問題としての出題も増加傾向にある。本研究では、近年の入試問題を紹介しつつ、指導上のポイントを整理することで、今後の学習指針に役立ててもらえたらと考える。

2 入試問題の紹介

<2022年 東北大学 前期日程 第3問>

正の整数 n に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

- (1) 正の実数 x に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

[概要]

この問題は、極限に関する問題で、特に「はさみうちの原理」を活用する典型的な構成となっている。

[解]

- (1) $x > 0$ において、同値変形すると

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+2x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{2+x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2+2x}{2+x} \right)^2 \leq 1+x \leq \left(\frac{2+x}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+2x)^2 \leq (1+x)(2+x)^2 \\ 4(1+x) \leq (2+x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x^3 + x^2 \\ 0 \leq x^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

とで、 $x > 0$ のとき ② は成り立つので、① も成り立つ。

- (2) (1) で示した不等式に $x = \frac{k}{n^2}$ ($x > 0$) を代入すると

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{k}{n^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{\frac{k}{n^2}}{2}$$

$$\text{となり、} k \leq n \text{ なので } 2 + \frac{n}{n^2} \geq 2 + \frac{k}{n^2}$$

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{n}{n^2}} \leq \frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{k}{n^2}}$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{n}{n^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{\frac{k}{n^2}}{2n^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{n}{n^2}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{2n^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2}$$

が成り立つ。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2 + n} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{4}$$

であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

[解法のポイント]

- (1) 不等式の証明

同値変形や関数の差をとっての評価を行う。微分を使っても良いが、平方を使うことで、より簡潔に証明できる。不等式の変形において、逆数を取ったり、平方を使うなどの工夫が鍵となる。

- (2) 極限の評価

はさみうちの原理を利用する。上限の評価は区分求積法で簡単に $\frac{1}{4}$ に収束することが分かるが、下限の評価が難しい。分母に k が残っているため、直接区分求積法が使えない。そこで、分母の k を n に置き換えることで、より扱いやすい形に変形することで区分求積法が適用できるようになる。「評価してはさむ」ための工夫ができるかどうかは鍵となる。

<2023年 大阪大学 前期日程 第1問>

n を 2 以上の自然数とする。

- (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

- (2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

[概要]

この問題は、不等式の評価と極限の計算に関する問題で、こちらも「はさみうちの原理」を活用する。

[解]

- (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$f(x) = (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \text{ とおく。}$$

$$1 + \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} \text{ なので}$$

$$f(x) = (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1 - (-x)^n}{1+x} \right\} = \frac{x^n}{1+x}$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq 1$ から

$$f(x) - \frac{1}{2}x^n = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) x^n = \frac{1-x}{2(1+x)} x^n \geq 0$$

$$x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} - f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{1+x}\right)x^n$$

$$= \frac{x(1-x)}{2(1+x)}x^n \geq 0$$

ゆえに、 $\frac{1}{2}x^n \leq f(x) \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$ となるため、成り立つ。

(2) (1) より $\frac{1}{2}x^n \leq f(x) \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$ を $0 \leq x \leq 1$ の範囲で積分すると、

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}\right) dx$$

ここで、

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} dx$$

$$= \left[(-1)^n \left\{ \log \left((x+1) - x - \sum_{k=2}^n \frac{-(-x)^k}{k} \right) \right\} \right]_0^1$$

$$= (-1)^n \left\{ \log 2 - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right\}$$

$$= (-1)^n \left\{ \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right\}$$

$$= (-1)^n (\log 2 - a_n)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}\right) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

であるから、

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n (\log 2 - a_n) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

各辺に $-n$ (< 0) をかけて

$$-\frac{n}{2(n+1)} \geq (-1)^n n (\log 2 - a_n) \geq -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{n}{2(n+1)} \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right\} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (a_n - \log 2) = -\frac{1}{2}$$

[解法のポイント]

(1) 不等式の証明

中項にある和は、等比数列の和として計算でき、典型的な「不等式の評価→極限への誘導」の流れとなっている。

(2) 極限の評価

はさみうちの原理を利用する。極限の中に $\log 2$ が現れるが、これは $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ という積分表現を使うことで導ける。中項の $\frac{1}{1+x}$ のような形から、積分との対応に気付くかどうか勝負となる。積分と級数の関係を見抜く力が必要。また、「不等式→積分→極限」という流れは、阪大や東大などの難関大で頻出。ちなみに、メルカトル級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を知っていると、収束先が見えやすくなる。

<2023年 九州大学 前期日程 第2問>

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (2) $\alpha > 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。

[概要]

この問題は、漸化式で定義された数列の収束・発散を初期値 α の値によって分類して調べる問題である。絶対値が含まれているため、場合分けと数学的帰納法を用いた証明が求められる。

[解]

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2(a_n - 1) & (a_n > 1) \\ 0 & (a_n \leq 0) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

(1) $\alpha \leq 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $a_2 = 0$ であり、 $a_n = 0$ のとき

$a_{n+1} = 0$ であるから、帰納的に $a_n = 0$ ($n \geq 2$) である。

よって、 $\{a_n\}$ は 0 に収束する。

(2) $\alpha > 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $a_2 = 2(\alpha - 1) > 2$ であり、 $a_n > 2$ の

とき、 $a_{n+1} = 2(a_n - 1) > 2$ であるから、帰納的に

$a_n > 2$ ($n \geq 1$) である。よって、全ての自然数 n について

$$a_{n+1} = 2(a_n - 1) \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$$

が成り立つから、

$$a_n - 2 = (a_1 - 2) \cdot 2^{n-1} = (\alpha - 2) \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = (\alpha - 2) \cdot 2^{n-1} + 2$$

$\alpha > 2$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となる。

したがって、 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散する。

(3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $a_2 = 2(\alpha - 1)$ であり、

$0 < a_2 < 1$ となる。よって、(1) より $a_n = 0$ ($n \geq 3$) となるから、

$\{a_n\}$ は 0 に収束する。

(4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、すべての自然数 n に対して

$$a_n > 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つと仮定すると、 $\textcircled{1}$ より $a_n = 2(a_n - 1)$ が成り立つから、

(2) より $a_n = (\alpha - 2) \cdot 2^{n-1} + 2$ となる。ここで、 $\alpha - 2 < 0$

と $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} = \infty$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ となり、 $\textcircled{2}$ に反する。

よって、ある k に対して $a_k \leq 1$ となるから、(1) と同様にして、

$a_n = 0$ ($n \geq k+1$) となるから、 $\{a_n\}$ は 0 に収束する。

[解法のポイント]

(1) と (3) は簡単に調べることができる。(2) は、すべての項が 2 より大きいことを数学的帰納法で示すことで調べることができる。(4) が最も難しく、 $a_n > 1$ を仮定して絶対値を外すことで、数列の振る舞いを調べることができるようになる。

<2024年 京都大学 前期試験 第6問>

自然数 k に対して、 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする。 n を自然数とし、 a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。また、 a_k の整数部分が n 桁であり、その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。次を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし、例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で、最高位の数字は 2 である。

[概要]

この問題は、桁数・最高位の数字に関する極限の問題である。こちらではさみうちの原理を活用するが、「範囲」から「個数」に変換する部分が難しい。

[解]

$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ の整数部分が n 桁である $\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$ によって、 $(n-1)\log_2 10 \leq \sqrt{k} < n\log_2 10$ となる。ここで、 $c = \log_2 10$ とおくと

$$\begin{aligned} c(n-1) &\leq \sqrt{k} < cn \\ c^2(n-1)^2 &\leq k < c^2 n^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

この範囲の幅が、 $c^2 n^2 - c^2(n-1)^2 = 2c^2 n - c^2$ となるから、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 k の個数 N_n は

$$N_n = [2c^2 n - c^2] \text{ または } N_n = [2c^2 n - c^2] + 1$$

これと、 $2c^2 n - c^2$ が整数でないことから

$$2c^2 n - c^2 - 1 < N_n < 2c^2 n - c^2 + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

同様に、 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ の整数部分が n 桁で、最高位の数字が 1 であるとき

$$\begin{aligned} 10^{n-1} &\leq 2^{\sqrt{k}} < 2 \cdot 10^{n-1} \\ c(n-1) &\leq \sqrt{k} < c(n-1) + 1 \\ c^2(n-1)^2 &\leq k < [c(n-1) + 1]^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

この範囲の幅が、 $[c(n-1) + 1]^2 - c^2(n-1)^2 = 2c(n-1) + 1$ だから、 $\textcircled{3}$ を満たす自然数 k の個数 L_n について、十分に大きな n に対して、 $\textcircled{2}$ と同様にして

$$2c(n-1) < L_n < 2c(n-1) + 2 \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。

$\textcircled{2}$ と $\textcircled{4}$ から、十分に大きな n に対して

$$\frac{2c(n-1)}{2c^2 n - c^2 + 1} < \frac{L_n}{N_n} < \frac{2c(n-1) + 2}{2c^2 n - c^2 - 1}$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2c(n-1)}{2c^2 n - c^2 + 1} = \frac{1}{c}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2c(n-1) + 2}{2c^2 n - c^2 - 1} = \frac{1}{c}$

であるので、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n} = \frac{1}{c} = \frac{1}{\log_2 10} = \log_{10} 2$$

[解法のポイント]

不等式の変形と個数の評価、はさみうちの原理による極限評価

対数の性質と不等式の処理に慣れているかどうかが鍵となる。桁数や最高位の数字の条件を不等式に変換し、その範囲に含まれる整数の個数を評価することで、極限を求める。

<2025年 東京科学大学 前期試験 第4問>

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

により定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$\tan b_n = \frac{1}{a_n}$$

により定める。ただし、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ であるものとする。

(1) $n \geq 2$ に対して、 $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ を求めよ。

(2) $m \geq 1$ (m は整数) に対して、 $a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ。

[概要]

この問題は、漸化式と無限級数に関する問題で、フィボナッチ数列と三角関数の融合問題となっている。

[解]

(1) $x_n = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ ($n \geq 2$) とおくと

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 \\ &= (a_{n+1} + a_n)a_n - a_{n+1}(a_n + a_{n-1}) \\ &= a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1} \\ &= -x_n \end{aligned}$$

よって、 $a_3 = a_1 + a_2 = 2$ であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$x_n = x_2(-1)^{n-2} = (a_3a_1 - a_2^2)(-1)^{n-2} = (-1)^{n-2}$$

より、 $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$

(2) $a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$

$$\begin{aligned} &= a_{2m} \cdot \frac{\frac{1}{a_{2m+1}} + \frac{1}{a_{2m+2}}}{1 - \frac{1}{a_{2m+1}} \cdot \frac{1}{a_{2m+2}}} \\ &= \frac{a_{2m}(a_{2m+2} + a_{2m+1})}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{x_{2m+1} + a_{2m+1}^2 + a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} \\ &= \frac{(-1)^{2m+1} + a_{2m+1}(a_{2m+1} + a_{2m})}{a_{2m+1}(a_{2m+1} + a_{2m}) - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3) 題意より、 a_n はすべて自然数であり

$1 = a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < \dots$ であるから、 $a_n \geq n-1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ である。

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ となる。

また、 $1 = \frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_3} > \dots > \frac{1}{a_n} > \dots > 0$ より、 $1 = \tan b_1 = \tan b_2 > \tan b_3 > \dots > \tan b_n > \dots > 0$ となり、

これと、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ から、 $\frac{\pi}{4} = b_1 = b_2 > b_3 > \dots > 0$ である。

ここで、(2) より、 $\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \frac{1}{a_{2m}} = \tan b_{2m}$ であ

り、 $0 < b_{2m+1} + b_{2m+2} < \frac{\pi}{2}$, $0 < b_{2m} < \frac{\pi}{2}$ なので、

$b_{2m+1} + b_{2m+2} = b_{2m} \quad (m \geq 1)$ となる。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^l b_{2m+1} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ b_1 + \sum_{m=1}^l (b_{2m} - b_{2m+2}) \right\} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 - b_{2l+2}) \\ &= b_1 + b_2 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

[解法のポイント]

(1) フィボナッチ数列の恒等式

$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$ はフィボナッチ数列の有名な恒等式であり、数学的帰納法でも証明が可能である。この恒等式が(2)の計算で重要な役割を果たす。

(2) $\tan \theta$ の加法定理を利用

$\tan \theta$ がなくなるように式変形していく。漸化式と(1)の恒等式を上手く取り入れ、約分できる形を作れるかどうか鍵となる。

(3) 無限級数の評価

(2)の結果から $b_{2m+1} + b_{2m+2} = b_{2m}$ が成り立つことを導く。(1)同様、数学的帰納法でも示せる。漸化的な関係を見抜く力が必要となる。

3 おわりに

出題傾向としては、漸化式の一般項導出から極限計算への流れが定番だが、他にも、単調性と有界性による収束判定、はさみうちの原理、不等式評価などが頻繁に用いられていた。また、積分や確率などとの融合問題も増加しており、単元横断的な理解の必要性を改めて感じた。

また、旧帝大や難関国公立大学では、論証を伴う記述式問題が多く、形式的な計算だけでなく論理的説明力が求められるようになっている。幅広いテーマに対応するためには、基本的な理解に加えて応用力が必要となり、過去問演習とテーマ別演習をバランスよく行うことで、論理的説明力と計算力を養うことができると考える。

【参考文献】

全国大学入試問題正解 [5] 2023年～2026年受験用（旺文社）