

国公立大学入試問題の研究

一難関大学の入試問題（文系）

愛媛県立松山東高等学校 高田 潤哉

1 はじめに

今回は難関大学の入試問題（文系）をテーマとして研究を行った。御存じの通り、受験科目に数学を課す学部・学科も多く、基礎事項の徹底した理解や計算力、読解力、記述力、思考力など求められる数学力は高い。

入試問題の出題範囲も多岐に渡るため、今回は特に思考力が問われる確率の融合問題に焦点を当てて、その考察を行った。なお、過去3年間の難関大学（文系）前期日程で確率を出題した大学は以下の通りである。

年度	北海道	東北	東京	一橋	名古屋	京都	大阪	神戸	九州
2026		○	○	○	○	○		○	○
2025	○		○	○	○	○		○	場
2024	○	○	○	○	○	○		○	○

2025九州は場合の数であった

さて、その確率であるが、過去問や定型問題の練習を行っている受験生の真の数学力を測るには難関大学にとっては非常に有効な問題になっている。確率の基礎事項だけでなく、整数、数列、図形、方程式、不等式などとの融合問題が作りやすく、パターン学習や暗記に頼っている受験生と差がつきやすい。また、理系と共通問題となる場合は難易度が高くなりやすい。

以下、ここ3年間の傾向から特徴的な問題を紹介したい。

2 大学入試問題の考察

○円周上等分に点を配置する

正 n 角形や円形に並べるなど、円周上に等間隔に並んだ点を前提に考える問題が多い。2025年度入試では東京大学と一橋大学でよく似た出題がなされたのでまずはそれから紹介したい。

どこに視点を置いて考えるかで明暗が分かれたのではないかなと思う。ともに、対角線が円の直径にならないことから、残りの1点、もしくは2点の点の位置がポイントである。

<2025 一橋大学 文系前期>

n を3以上の奇数とする。円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる3点を選んだとき、その3点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ。

解答

$n=3$ のとき、選んだどの三角形も点 O を内部に含むから $p_3=1$ 以下、 $n \geq 5$ とする。

異なる n 個の頂点から3点を選んでできる三角形は

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ (通り)}$$

n は奇数であるから、正 n 角形の異なる2頂点を結んでできる線分は、その外接円の直径にならない。よって、選んだ3点を頂点とする三角形の周上に点 O が存在することはない。

ゆえに、「選んだ3点を頂点とする三角形が点 O を内部に含む」という事象は、「点 O が選んだ3点を頂点とする三角形の外部にある」という事象の余事象である。

正 n 角形の頂点の1つを A_0 とする。
点 A_0 を頂点にもち、辺 A_0A_y が最大の辺になるような

$$\text{三角形 } A_0A_xA_y \left(1 \leq x < y \leq \frac{n-1}{2} \right)$$

を考える。

点 A_0 の選び方は n 通り

そのおのおのについて、組 (x, y) の

選び方は、1から $\frac{n-1}{2}$ までの整数から異なる2つを選んで

$${}_{\frac{n-1}{2}}C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8} \text{ (通り)}$$

ゆえに、点 O を含まない三角形の選び方は

$$\frac{n(n-1)(n-3)}{8} \text{ 通り}$$

したがって、点 O が選んだ3点を頂点とする三角形の外部にある確率は

$$\frac{n(n-1)(n-3)}{8} \times \frac{6}{n(n-1)(n-2)} = \frac{3(n-3)}{4(n-2)}$$

$$\text{よって、} n \geq 5 \text{ のとき } p_n = 1 - \frac{3(n-3)}{4(n-2)} = \frac{n+1}{4(n-2)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$p_3=1$ であるから、①は $n=3$ のときも成り立つ。

$$\text{ゆえに、3以上の奇数} n \text{ に対して } p_n = \frac{n+1}{4(n-2)}$$

次の問題も考え方は同じである。

<2025 東京大学 文系前期>

n を5以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり、それに内接する正 n 角形を考える。 n 個の頂点から異なる4点を同時に選ぶ。ただし、どの4点も等確率で選ばれるものとする。

選んだ4点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

解答

$n=5$ のとき、選んだどの四角形も点 O を内部に含むから $p_5=1$ 以下、 $n \geq 7$ とする。

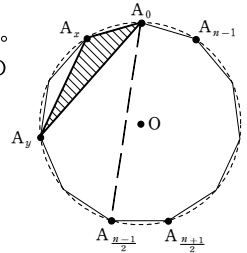
異なる n 個の頂点から4点を選んでできる四角形は

$${}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ (通り)}$$

n は奇数であるから、正 n 角形の異なる2頂点を結んでできる線分は、その外接円の直径にならない。

よって、選んだ4点を頂点とする四角形の周上に点 O が存在することはない。

したがって、「選んだ4点を頂点とする四角形が点 O を内部



に含む」という事象は、「点 O が選んだ 4 点を頂点とする四角形の外部にある」という事象の余事象である。この余事象について考える。

正 n 角形の頂点の 1 つを A_0 とし、 A_0 から反時計回りの順に、頂点を $A_1, A_2, \dots, A_n$ とする。

点 A_0 を頂点にもち、辺 A_0A_z が最大の辺になるような四角形 $A_0A_xA_yA_z$

$$(1 \leq x < y < z \leq \frac{n-1}{2}) \text{ を考える。}$$

この四角形が点 O を含まないような組

(x, y, z) の選び方は、1 から $\frac{n-1}{2}$

までの整数から異なる 3 つを選んで

$$\frac{n-1}{2} C_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-5}{2} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{48} \text{ (通り)}$$

最初の頂点の選び方は n 通りあるから、点 O を含まない四角形の選び方は

$$\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48} \text{ 通り}$$

したがって、点 O が選んだ 4 点を頂点とする四角形の外部にある確率は

$$\frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48} \times \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n-5}{2(n-2)}$$

よって、 $n \geq 7$ のとき $p_n = 1 - \frac{n-5}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2(n-2)} \dots \text{①}$

$p_5 = 1$ であるから、① は $n = 5$ のときも成り立つ。

ゆえに、5 以上の奇数 n に対して $p_n = \frac{n+1}{2(n-2)}$

※解答を見ればそこまで難しく思えないかもしれないが、設問がなく、1 点を固定した残りの点の取り方や対称性など、受験生には難解であったのではないだろうか。

この円周上に等間隔にとった点に関しては、他大学では以下のような問題が出題されている。三角比との融合問題である。

<2026 神戸大学 文系前期>

1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき、出た目の数を順に a, b とおく。座標平面上の 2 点 A, B を

$$A \left(\cos \frac{a}{6} \pi, \sin \frac{a}{6} \pi \right), B \left(\cos \frac{b+6}{6} \pi, \sin \frac{b+6}{6} \pi \right)$$

とし、原点を O とする。

(1) 3 点 O, A, B が一直線上にある確率を求めよ。

(2) 3 点 O, A, B が一直線上になく、かつ三角形 OAB の面積が $\frac{1}{4}$ 以下である確率を求めよ。

(3) 2 点 A, B 間の距離が 1 より大きい確率を求めよ。

解答

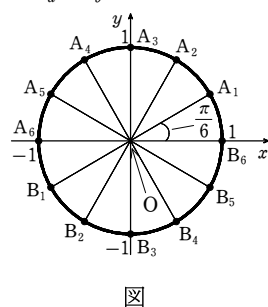
2 点 A, B は原点 O を中心とする半径 1 の円周上の点である。

a, b の値に応じて $A \left(\cos \frac{a}{6} \pi, \sin \frac{a}{6} \pi \right)$,

$B \left(\cos \frac{b+6}{6} \pi, \sin \frac{b+6}{6} \pi \right)$ とすると、各点は図のようにな

る。よって、2 点 A, B の組合せは全部で 36 通りあり、

$\angle A_0 O B_\theta = \theta$ とすると、 θ は次の表のようになる。



図

表

θ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
A_2	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
A_3	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
A_4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
A_5	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$
A_6	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

(1) 3 点 O, A_a, B_b が一直線上にあるとき $\theta = \pi$

表から、 $\theta = \pi$ となる 2 点 A, B の組合せは 6 通り

よって、求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) $\theta = \pi$ のとき、3 点 O, A_a, B_b は一直線上にあるから

$$0 < \theta < \pi$$

$OA_a = OB_b = 1$ であるから、 $\triangle OA_a B_b$ の面積は

$$\frac{1}{2} OA_a \cdot OB_b \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

よって、 $\triangle OA_a B_b$ の面積が $\frac{1}{4}$ 以下になるとき

$$\frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta \leq \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ であるから $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6} \leq \theta < \pi$

表から、これを満たす 2 点 A, B の組合せは 12 通り

よって、求める確率は $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(3) 2 点 A, B 間の距離が 1 以下であるという事象を考える。

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $\triangle OA_a B_b$ は正三角形であるから $A_a B_b = 1$

よって、 $A_a B_b \leq 1$ のとき $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$

表から、これを満たす 2 点 A, B の組合せは 6 通り

ゆえに、2 点 A, B 間の距離が 1 以下である確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

点 A, B 間の距離が 1 より大きいという事象は、2 点 A, B 間の距離が 1 以下であるという事象の余事象である。

よって、求める確率は $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

※実力のある文系生徒や理系生徒であれば、一見して中心が原点、半径が 1 の円周上に等間隔に並んだ点だと分かるだろう。点の個数が有限なので、それが分かれば簡単である。

理系生徒ならば「複素数平面」も学習しているので、円周上の点の位置関係や共役な複素数を表すバーの扱いには慣れてい

るが、慣れていない文系の生徒には難しく感じてしまう。

次の問題は1の3乗根を考える、

<2024 九州大学 文系前期>

ω を $x^3=1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。
さいころを繰り返し投げて、次の規則で4つの複素数 $0, 1, \omega, \omega^2$ を並べていくことにより、複素数の列 $z_1, z_2, z_3, \dots$ を定める。

● $z_1=0$ とする。

● z_k まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を t とする。

このとき z_{k+1} を次のように定める。

○ $z_k=0$ のとき、 $z_{k+1}=\omega^t$ とする。

○ $z_k \neq 0, t=1, 2$ のとき、 $z_{k+1}=0$ とする。

○ $z_k \neq 0, t=3$ のとき、 $z_{k+1}=\omega z_k$ とする。

○ $z_k \neq 0, t=4$ のとき、 $z_{k+1}=\overline{\omega z_k}$ とする。

○ $z_k \neq 0, t=5$ のとき、 $z_{k+1}=z_k$ とする。

○ $z_k \neq 0, t=6$ のとき、 $z_{k+1}=\overline{z_k}$ とする。

ここで、複素数 z に対し、 $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1) $\omega^2=\overline{\omega}$ となることを示せ。

(2) $z_n=0$ となる確率を n の式で表せ。

(3) $z_3=1, z_3=\omega, z_3=\omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。

(4) $z_n=1$ となる確率を n の式で表せ。

解答

(1) 省略

(2) $z_n=0$ となる確率を p_n とする。

$\omega^3=1, \omega^4=\omega, \omega^5=\omega^2, \omega^6=1$ である。

(1) から $\overline{\omega}=\omega^2, \overline{\omega^2}=\omega, \overline{1}=1$

$z_{n+1}=0$ となるのは、 $z_n \neq 0$ で、さいころを投げて出た目が1, 2のときであるから

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n) = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{ここで } p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $\frac{3}{4}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

$$\text{よって、} z_n=0 \text{ となる確率は } \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

(3) z_k, t から定まる z_{k+1} を表にまとめると

$z_n=1, z_n=\omega, z_n=\omega^2$ となる

確率をそれぞれ q_n, r_n, s_n

とすると、 $q_2=r_2=s_2=\frac{1}{3}$

$z_3=1$ となる確率は

$$q_3 = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$z_3=\omega$ となる確率は

$z_k \backslash t$	1	2	3	4	5	6
0	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1
1	0	0	ω	ω^2	1	1
ω	0	0	ω^2	ω	ω	ω^2
ω^2	0	0	1	1	ω^2	ω

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{6}s_2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$z_3=\omega^2$ となる確率は

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{6}s_2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(4) $q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1}$ について考えると

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}s_n \quad \dots\dots ①$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \quad \dots\dots ②$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \quad \dots\dots ③$$

②, ③ から $r_{n+1}=s_{n+1} \quad r_1=s_1=0$ であるから $r_n=s_n$

①-② から

$$\begin{aligned} q_{n+1} - r_{n+1} &= \frac{1}{6}q_n - \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \\ &= \frac{1}{6}q_n - \frac{1}{6}r_n = \frac{1}{6}(q_n - r_n) \end{aligned}$$

$q_1=r_1=0$ であるから $q_n - r_n = 0$ すなわち $q_n=r_n$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから $p_n + 3q_n = 1$

$$\text{ゆえに } q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって、} z_n=1 \text{ となる確率は } \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

○整数

次は整数問題との融合を考える。確率同様に思考力を測るためには有効である。整数の基本事項の理解及び、正しく場合分けできるかがポイントである。

<2025 神戸大学 文系前期>

n を自然数とする。

(1) 1個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n で最小のものを求めよ。

(2) 1個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n で最小のものを求めよ。

(3) 1個のサイコロを3回投げて出た目の積が20の約数となる確率を求めよ。

解答

(1) サイコロの出た目が必ず n の約数となるための条件は、 n が1, 2, 3, 4, 5, 6の公倍数となることである。

$4=2^2, 6=2 \cdot 3$ であるから、1から6までの整数の最小公倍数は $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

よって、 n は60の倍数であり、このような n で最小のものは $n=60$

(2) 「1個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率

が $\frac{5}{6}$ 」……① とする。

n が①を満たすとき、1 から 6 までの 6 つの整数のうち、1 つだけ n の約数でないものが存在する。

1 はすべての自然数の約数である。

また、 $2 \times 3 = 6$ より、2, 3, 6 のうち 2 つのみが約数になることはない。

ゆえに、 n は 4 または 5 のうちの一方を約数にもたない。

n が 4 を約数にもたないとき、 n は 1, 2, 3, 5, 6 の公倍数だが、4 の倍数でない。

すなわち、 n は 30 の倍数だが 60 の倍数でない。……②

n が 5 を約数にもたないとき、 n は 1, 2, 3, 4, 6 の公倍数だが、5 の倍数ではない。

すなわち、 n は 12 の倍数だが 60 の倍数でない。……③

②, ③のうち一方のみを満たすような n で最小のものは 12 によって、求める自然数 n は $n = 12$

(3) サイコロを 3 回投げるとき、目の出方は全部で

6^3 通り

サイコロを 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる場合は、次の 6 つの場合がある。

[1] 出た目の積が 1 のとき

出た目は 1 が 3 回出るときで 1 通り

[2] 出た目の積が 2 のとき

出た目は 1 が 2 回、2 が 1 回出るときで ${}_3C_1 = 3$ (通り)

[3] 出た目の積が 4 のとき

出た目は「1 が 2 回、4 が 1 回出る」または「1 が 1 回、2 が 2 回出る」ときで

${}_3C_1 \times 2 = 6$ (通り)

[4] 出た目の積が 5 のとき

出た目は 1 が 2 回、5 が 1 回出るときで ${}_3C_1 = 3$ (通り)

[5] 出た目の積が 10 のとき

出た目は 1 が 1 回、2 が 1 回、5 が 1 回出るときで $3! = 6$ (通り)

[6] 出た目の積が 20 のとき

出た目は「2 が 2 回、5 が 1 回出る」または「1 が 1 回、4 が 1 回、5 が 1 回出る」ときで ${}_3C_1 + 3! = 9$ (通り)

[1] ~ [6] より、求める確率は

$$\frac{1+3+6+3+6+9}{6^3} = \frac{28}{216} = \frac{7}{54}$$

※丁寧に場合分けをすれば解けない問題ではない。普段から論理的に記述力を養う問題演習を行いたい。

<2026 京都大学 文系前期>

n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ、表が出たら 1, 裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返して、記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし、数の表し方は 10 進法とする。このとき、 X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

解答

求める確率を p_n とする。

記録された数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とする。

$$X = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$$

X が 6 の倍数であるための必要十分条件は、 X が 3 の倍数かつ 2 の倍数であることである。すなわち、 X の各位の和が 3 の倍数で、かつ $a_n = 2$ となることである。

n を 2 以上の整数とする。

X の各位の和を S_n とおくと、 $S_n = S_{n-1} + a_n$ であるから、

「 S_n が 3 の倍数かつ $a_n = 2$ 」

という条件と

「 S_{n-1} を 3 で割った余りが 1 で、かつ $a_n = 2$ 」……①

という条件は同値である。

そこで、次のように q_n, r_n, s_n を定める。

S_n を 3 で割った余りが 0 である確率を q_n

S_n を 3 で割った余りが 1 である確率を r_n

S_n を 3 で割った余りが 2 である確率を s_n

このとき、① から求める確率 p_n は

$$p_n = r_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (n \geq 2) \quad \text{と表される。}$$

ゆえに、 p_n を求めるには、 r_n を n を用いて表せばよい。

r_{n+1} について、 S_{n+1} を 3 で割った余りが 1 となるのは

[1] n 回試行を行った後で、 S_n を 3 で割った余りが 0 の状態から、硬貨で表が出て $a_{n+1} = 1$ が記録される

[2] n 回試行を行った後で、 S_n を 3 で割った余りが 2 の状態から、硬貨で裏が出て $a_{n+1} = 2$ が記録される場合があり、これらは互いに排反である。

$$\text{よって} \quad r_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{2} + s_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(q_n + s_n)$$

ここで、 $q_n + r_n + s_n = 1$ であるから $r_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - r_n)$

$$\text{変形して} \quad r_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(r_n - \frac{1}{3}\right)$$

また、 r_1 について、 S_1 を 3 で割った余りが 1 となるのは、

$$a_1 = 1 \text{ となるときであるから} \quad r_1 = \frac{1}{2}$$

よって、数列 $\left\{r_n - \frac{1}{3}\right\}$ は、初項 $r_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$$\text{よって} \quad r_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{すなわち} \quad r_n = \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$p_n = \frac{1}{2} r_{n-1} = \frac{1}{6} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad \dots\dots ②$$

$n = 1$ のとき、 X は 6 の倍数とはならないから $p_1 = 0$ であるため、② は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって、正の整数 n に対して

$$p_n = \frac{1}{6} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

※「6 で割り切れる」を「偶数かつ 3 の倍数」と読み替えて漸化式にするのだが、立式が難しい。

東北大学も (3) で整数の知識が問われている。

<2026 東北大学 文系前期>

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 (*) を次のように定める。

- (*) $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 枚の硬貨を 1 回投げて,} \\ \cdot \text{ 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。} \\ \cdot \text{ 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ,} \\ \quad \text{奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め,} \\ \quad \text{偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。} \end{array} \right.$
ただし、硬貨を投げたときの表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$, さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする。

- (1) 試行 (*) を 3 回繰り返した後に、点 P が原点に戻っている確率を求めよ。
(2) 試行 (*) を 6 回繰り返した後に、点 P が原点に戻っている確率を求めよ。
(3) n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 (*) を n 回繰り返した後に、点 P が原点に戻っている確率を求めよ。

解答

試行 (*) を 1 回行ったときの、点 P の移動とそれが起こる確率は次のようになる。

[1] 正の向きに 1 進む (確率) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{4}$

[2] 負の向きに 2 進む (確率) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

- (1) 点 P は原点から出発するから、3 回の試行のうち、[1] が k 回、[2] が $(3-k)$ 回起こったとすると、点 P の数直線上の位置は $1 \cdot k + (-2) \cdot (3-k) = 3k - 6$

$3k - 6 = 0$ とすると $k = 2$

ゆえに、点 P が原点に戻っているのは、3 回中 [1] が 2 回、[2] が 1 回起こる場合であるから、求める確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{27}{64}$$

- (2) (1) と同様に考えて、6 回の試行のうち、[1] が k 回、[2] が $(6-k)$ 回起こったとすると、点 P の数直線上の位置は

$1 \cdot k + (-2) \cdot (6-k) = 3k - 12$

$3k - 12 = 0$ とすると $k = 4$

ゆえに、点 P が原点に戻っているのは、6 回中 [1] が 4 回、[2] が 2 回起こる場合であるから、求める確率は

$${}_6C_4 \left(\frac{3}{4} \right)^4 \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1215}{4096}$$

- (3) (1) と同様に考えて、 n 回の試行のうち、[1] が k 回、[2] が $(n-k)$ 回起こったとすると、点 P の数直線上の位置は

$1 \cdot k + (-2) \cdot (n-k) = 3k - 2n$

$3k - 2n = 0$ とすると $k = \frac{2n}{3}$

n は 3 で割り切れない正の整数であるから、これを満たす 0 以上の整数 k は存在しない。

よって、点 P が原点に戻っていることは起こらないから、求める確率は 0

最後に、方程式や不等式との融合問題を紹介したい。

○方程式

九州大学は方程式と 3 次関数の解の判別との融合で以下のような問題が出題されている。

<2026 九州大学 文系前期>

1 個のさいころを 3 回続けて投げ、出る目を順に a, b, c とする。整式 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数が 1 個である確率を求めよ。
(2) $f(x) = 0$ を満たす自然数 x の個数が 3 個である確率を求めよ。

解答

さいころを 3 回投げたとき、目の出方は 6^3 通り。

$x^2 - ax + b = 0$ …… ① とする。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ は $x = c$ を実数解にもつ。

よって、 $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数が 1 個であるのは、次のいずれかの場合である。

[1] ① が実数解をもたない

[2] ① が $x = c$ を重解にもつ

[1] について

① の判別式を D とすると $D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = a^2 - 4b$

① が実数解をもたないとき $D < 0$ すなわち $a^2 < 4b$

これを満たす a, b の組は

$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
 $(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3),$
 $(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)$

の 17 通り。

そのおのおのに対して、 c の値が 6 通りずつあるから、[1] の場合は 17×6 通り

[2] について

① が $x = c$ を重解にもつとき、解と係数の関係により

$2c = a, c^2 = b$ …… ②

$c = 1$ のとき $a = 2, b = 1$

$c = 2$ のとき $a = 4, b = 4$

$c = 3, 4, 5, 6$ のとき、② を満たす組 a, b は存在しない。

よって、[2] の場合は 2 通り

[1], [2] は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{17 \times 6 + 2}{216} = \frac{104}{216} = \frac{13}{27}$$

- (2) $f(x) = 0$ を満たす自然数 x の個数が 3 個であるのは、① が $x = c$ 以外の異なる 2 つの自然数を解にもつことである。ここで、 $x = c$ 以外の異なる 2 つの自然数の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解と係数の関係により

$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$ …… ③

[1] $b = 1$ のとき、③ を満たす自然数の組 α, β は存在しない。

- [2] $b=2$ のとき $(\alpha, \beta)=(1, 2)$ で $a=3$
 [3] $b=3$ のとき $(\alpha, \beta)=(1, 3)$ で $a=4$
 [4] $b=4$ のとき $(\alpha, \beta)=(1, 4)$ で $a=5$
 [5] $b=5$ のとき $(\alpha, \beta)=(1, 5)$ で $a=6$
 [6] $b=6$ のとき $(\alpha, \beta)=(2, 3)$ で $a=5$
 $(\alpha, \beta)=(1, 6)$ のときは $a=7$ となるから不適。

よって、③を満たす a, b の組は 5 通り
 そのおのおのに対して、 c は α, β 以外で、1 以上 6 以下の自然数であるから、 c のとりうる値は 4 通り

したがって、求める確率は $\frac{5 \times 4}{216} = \frac{5}{54}$

※ 3 次関数の解についての基本事項と丁寧な整数解の吟味ができれば特に難解ということはないが、次の問題は難しい。

○不等式の証明

<2024 北海道大学 文系前期>

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げた出目の数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、

$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$ とおく。また、 K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

- (1) $K_2=5$ となる確率を求めよ。
 (2) $K_3=5$ となる確率を求めよ。
 (3) q_n を求めよ。また、 $K_n=q_n$ となるための $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ。

解答

- (1) $K_2 = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + |a_2 - 6|$
 $= a_1 - 1 + |a_1 - a_2| + 6 - a_2$
 $= 5 + a_1 - a_2 + |a_1 - a_2|$
 $a_1 > a_2$ のとき $K_2 = 5 + 2(a_1 - a_2) > 5$
 $a_1 \leq a_2$ のとき $K_2 = 5$
 $K_2 = 5$ となるのは、 $a_1 \leq a_2$ のときであり、その確率は
 $\frac{{}_6C_2 + 6}{6^2} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$
 (2) $K_3 = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - 6|$
 $= a_1 - 1 + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + 6 - a_3$
 $= 5 + a_1 - a_3 + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|$
 [1] $a_1 > a_3$ のとき
 $|a_1 - a_2| \geq 0, |a_2 - a_3| \geq 0$ であるから $K_3 > 5$
 [2] $a_2 < a_1 \leq a_3$ のとき
 $K_3 = 5 + a_1 - a_3 + a_1 - a_2 + a_3 - a_2 = 5 + 2(a_1 - a_2) > 5$
 [3] $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ のとき
 $K_3 = 5 + a_1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 = 5$
 [4] $a_1 \leq a_3 < a_2$ のとき
 $K_3 = 5 + a_1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_2 - a_3 = 5 + 2(a_2 - a_3) > 5$
 以上から、 $K_3 = 5$ となるのは、 $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ のときであり、その確率は $\frac{{}_6C_3 + {}_6C_2 + {}_6C_2 + 6}{6^3} = \frac{20 + 15 + 15 + 6}{6^3} = \frac{7}{27}$
 (3) (1), (2) から、
 $\lceil K_n \geq 5, K_n = 5$ となるための必要十分条件は

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \rceil \dots \dots$ ① と推測できる。

このことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=2$ のとき

(1) から、 $n=2$ のとき ① が成り立つ。

[2] $n=p$ ($p \geq 2$) のとき、① が成り立つと仮定すると

$K_p \geq 5, K_p = 5$ となるための必要十分条件は

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p$$

$n=p+1$ のときを考える

$$K_{p+1} = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{p-1} - a_p| + |a_p - a_{p+1}| + |a_{p+1} - 6|$$

$$= |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{p-1} - a_p| + |a_p - 6| + |a_p - a_{p+1}| + |a_{p+1} - 6| - |a_p - 6|$$

$$= K_p + |a_p - a_{p+1}| + a_p - a_{p+1}$$

$$a_p > a_{p+1} \text{ のとき } K_{p+1} = K_p + 2(a_p - a_{p+1}) > K_p \geq 5$$

$$a_p \leq a_{p+1} \text{ のとき } K_{p+1} = K_p \geq 5$$

ゆえに

$K_{p+1} \geq 5, K_{p+1} = 5$ となるための必要十分条件は

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{p+1}$$

よって、 $n=p+1$ のときも ① が成り立つ。

以上から、2 以上のすべての n について ① が成り立つ。

したがって

$q_n = 5, K_n = q_n$ となるための必要十分条件は

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

※ (1), (2) を解きながら推測し、数学的帰納法で証明する。

分散を意識できればと思うが、経験のない受験生には難解であったと思われる。

3 終わりに

ここ 3 年間の国公立難関大学文系における確率の出題率は高く、確率からの出題がない場合は、整数や数列の問題で思考力を測っていると思われる。この 3 分野を絡めた問題は作成しやすく、文系生徒の数学力を測る上でも有効であると感じる。

また、今後は期待値に関する問題にも注目したい。

最後に大阪大学文系では、ここ 3 年間確率からの出題はない。ベクトルは 3 年連続の出題で、2026 年度入試では数列、2025 年度入試は数学的帰納法であった。そろそろ出題されそう。

4 参考文献

2026 年受験用全国大学入試問題正解数学国公立大編
 2025 年受験用全国大学入試問題正解数学国公立大編
 2024 年受験用全国大学入試問題正解数学国公立大編
 (旺文社)