国公立大学入試問題の研究（立体の体積）

愛媛県立八幡浜高等学校　教諭　平家利晃

1　初めに

現在，２年生普通科理系の担任であるため，来年度に備えて，数Ⅲの範囲で入試問題の研究をしておこう！と年度当初に決まったのだが，はてどうしたものかと悩んだ結果，とりあえず数Ⅲの醍醐味は立体の体積だろ！（？）と思い、2023年～2025年受験用全国大学入試問題正解を参照し，旧帝大の中から，立体の問題を探して（時間があれば）解いてみることにした。

(1)　2022年度入試

【東北大学】

大問 $\boxed{6}$

半径１の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

【個人的難易度】★★

球の半径 r が変化するので，とりあえず球を徐々に大きくしていけば

(i)　上半球が直円柱に含まれる場合と，

(ii)　直円柱の横から上半球の一部がはみ出る場合と，

(iii)　直円柱の横と上から上半球の一部がはみ出ている場合と，

(iv)　直円柱が上半球に含まれる場合

の４つに分ければよさそうだな。

直円柱を真横からみれば長方形と円で処理ができそうと想像しやすかった。

【解答】

(i)　$0<r\leqq 1$ のとき，

$$V(r)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$$

(ii)　$1\leqq r\leqq\sqrt{3}$ のとき，

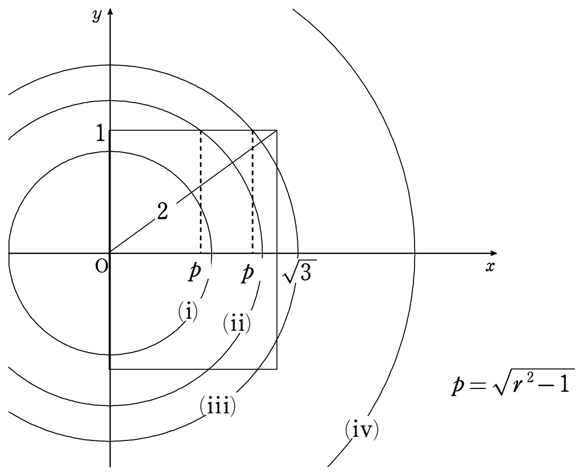
$$\begin{aligned}V(r)&=\pi\cdot1^2\cdot p+\int_p^r\pi(r^2-x^2)dx\\&=\pi p+\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_p^r\\&=\pi\left(p+\frac{2}{3}r^3-r^2p+\frac{1}{3}p^3\right)\\&=\frac{2}{3}\pi\left\{r^3-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\right\}\end{aligned}$$

(iii)　$\sqrt{3}\leqq r\leqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}V(r)&=\pi\cdot1^2\cdot p+\int_p^{\sqrt{3}}\pi(r^2-x^2)dx\\&=\pi p+\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_p^{\sqrt{3}}\\&=\pi\left(p+\sqrt{3}r^2-\sqrt{3}-r^2p+\frac{1}{3}p^3\right)\\&=\pi(r^2-1)\left(\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{r^2-1}\right)\end{aligned}$$

(iv)　$2\leqq r$ のとき，

$$V(r)=\pi\cdot1^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\,\pi$$



【東京大学】

大問 $\boxed{5}$

座標空間内の点 A(0，0，2) と点 B(1，0，1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ $=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

【個人的難易度】★★★★

とにかくイメージがしにくい。切り口のヒントとしては，問題文出だしの曲面S が円錐の側面だから，xy 平面に平行な平面 $z=t$ で切れば（ z 軸方向/真上からみれば），切り口が円になっているから… K も $z=k$ で切ったらいけるんじゃない？ということなのだろう。積分計算自体は簡単だが，そこに至るまでの議論が試験時間内で思いつくことができるかと言われれば厳しい。

【解答】

S は平面 $z=1$ 上の点 (0，0，1) を中心とする半径１の円を底面，点 (0，0，2) を頂点に持つ円錐の側面なので，S の平面 $z=t$（ $1\leqq t\leqq 2$ ）による切断面は中心 (0，0，t)，半径 $2-t$ の円周である。

S 上にある点 P の z 座標は１以上２以下，xy 平面上にある点 Q の z 座標は０なので，そのような点 P，Q を結ぶ線分の中点 M の z 座標は $\frac{1}{2}$ 以上１以下である。

したがって，K に属する点の z 座標は $\frac{1}{2}$ 以上１以下である。

以下，k を $\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ を満たす実数とする。

K の平面 $z=k$ での切断面の面積を $S(k)$ とするとき，K の体積 V は

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^1 S(z)dz$$

と表される。

$S(k)$ を求めるため，z 座標が k である点 (x, y, k) が K に属する条件を考える。この点が K に属することは，この点が S 上の点 P と xy 平面上の点 Q を結ぶ，長さが 2 の線分 PQ の中点となりうることと同値であるが，点 (x, y, z) の z 座標が k，Q の z 座標は 0 なので，P の z 座標は $2k$ でなければならず，したがって，点 P は平面 $z=2k$ 上の，点 $(0, 0, 2k)$ を中心とする半径 $2-2k$ の円周上にあることになる。よって，点 P の座標はある実数 α を用いて

$((2-2k)\cos\alpha, (2-2k)\sin\alpha, 2k)$

と表せる。

また，P と Q の z 座標の差が $2k$ なので，PQ の長さが 2 であるためには，PQ の xy 平面への正射影の長さが

$$\sqrt{2^2-(2k)^2}=2\sqrt{1-k^2}$$

であることが必要十分であり，したがって各 P に対し，PQ$=2$ を満たす xy 平面上の点 Q はある実数 β に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}2\sqrt{1-k^2}\cos\beta\\2\sqrt{1-k^2}\sin\beta\\-2k\end{pmatrix}$$

が成り立つような範囲を動く。

以上のような観察を踏まえると，PQ の中点 M について，

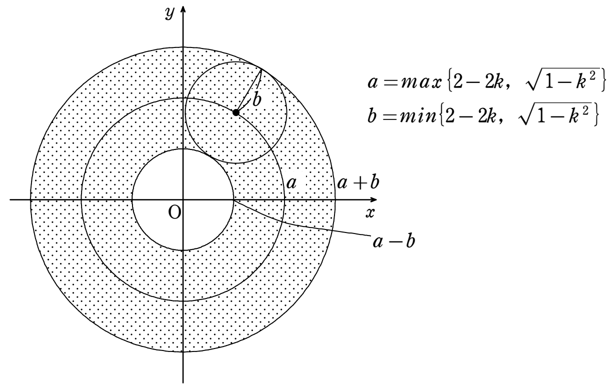
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=\begin{pmatrix}(2-2k)\cos\alpha\\(2-2k)\sin\alpha\\2k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{1-k^2}\cos\beta\\\sqrt{1-k^2}\sin\beta\\-k\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}+(2-2k)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{pmatrix}+\sqrt{1-k^2}\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立ち，α と β は独立に，任意の実数値をとって動くことができるので，M の存在範囲は平面 $z=k$ 上の点のうち，点 $(0, 0, k)$ からの距離が

「$2-2k$ と $\sqrt{1-k^2}$ の和」以下

「$2-2k$ と $\sqrt{1-k^2}$ の差」以上

である点全体である。



したがって，$2-2k$ と $\sqrt{1-k^2}$ の大小によらず，K の平面 $z=k$ での切断面の面積は

$$\pi\left((2-2k)+\sqrt{1-k^2}\right)^2-\pi\left((2-2k)-\sqrt{1-k^2}\right)^2$$
$$=8\pi(1-k)\sqrt{1-k^2}$$

であるから，求めるべき体積は

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}8\pi(1-z)\sqrt{1-z^2}\,dz$$
$$=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-z^2}\,dz-8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}z\sqrt{1-z^2}\,dz$$
$$=8\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-8\pi\left[-\frac{1}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=8\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-8\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}$$
$$=\frac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi$$

である。

(2) 2023年度入試

【京都大学】

大問 $\boxed{5}$

O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている。

(a) 点 P は x 軸上にある。

(b) 点 Q は yz 平面上にある。

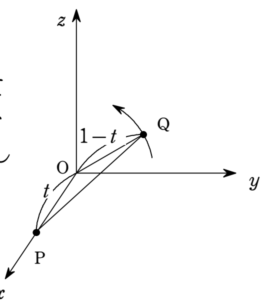
(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。

【個人的難易度】★★★

2 点 P，Q が連動しているので，とりあえず片方（P）を固定して考えてみると，もう片方（Q）が yz 平面上で円を描いているという動きはイメージしやすかった。

これを z 軸から（真上から）見れば，xy 平面での線分 PQ の通過領域を考え，x 軸の周りに回転させればいい。



【解答】

点 Q が y 軸上の $y\geqq 0$ を満たす部分を動くとし，このときの線分 PQ の通過領域を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積が求める体積である。

xy 平面上で，点P$(t, 0)$（$0<t<1$）とすると条件 (c) から点 Q の座標は $(0, 1-t)$ であり，直線 PQ の方程式は

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{1-t}=1$$

$$\therefore\quad y=\frac{t-1}{t}x+1-t$$

x を $0<x<1$ で固定して

$$f(t)=\frac{t-1}{t}x+1-t\quad(0<t<1)$$

とすると

$$f'(t)=\frac{1\cdot t-(t-1)\cdot 1}{t^2}x-1=\frac{x-t^2}{t^2}$$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{x}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

点 P は x 軸上を動くこと，点 P が原点にあるときは Q$(0, 1)$，点 P$(1, 0)$ にあるとき Q は原点であることもあわせて，線分 PQ の通過領域は

$0 \leqq y \leqq f(\sqrt{x})$（$0 \leqq x \leqq 1$）

と表せる。ここで

$$f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}x + 1 - \sqrt{x}$$
$$= (1-\sqrt{x})^2$$

である。

求める体積を V とすると，この立体は yz 平面に関して対称なので，

$$\frac{V}{2} = \int_0^1 \pi\{(1-\sqrt{x})^2\}^2 dx$$
$$= \pi\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 dx = 2\pi\int_1^0 u^4(u-1)du$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{\pi}{15}$$
$$\therefore \quad V = \frac{2\pi}{15}$$

(3) 2024年度入試

【大阪大学】

大問 $\boxed{4}$

$a > 1$ とする。xy 平面において，点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする。(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ。

【個人的難易度】★

何か裏がある問題なのか？？と思ったら何もなかった。簡単すぎないか？

(1) $C : (x-a)^2 + y^2 = 1$ （$a > 1$）から

$$x = a \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$V_1 = \int_{-1}^1 \pi(a+\sqrt{1-y^2})^2 dy$$
$$= 2\pi\int_0^1 \{a^2 + 2a\sqrt{1-y^2} + (1-y^2)\}dy$$
$$= 2\pi\left[a^2y + y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 4\pi a\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$
$$= 2\pi\left(a^2 + \frac{2}{3}\right) + 4\pi a \cdot \frac{\pi}{4}$$
$$= 2\pi a^2 + \pi^2 a + \frac{4}{3}\pi$$

(2)

$$V_2 = \int_{-1}^1 \{\pi(a+\sqrt{1-y^2})^2 - \pi(a-\sqrt{1-y^2})^2\}dy$$
$$= 2\pi\int_0^1 4a\sqrt{1-y^2}\,dy$$
$$= 8\pi a\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$
$$= 8\pi a \cdot \frac{\pi}{4}$$
$$= 2\pi^2 a$$

よって，$V_1 = 2V_2$ から

$$2\pi a^2 + \pi^2 a + \frac{4}{3}\pi = 2 \cdot 2\pi^2 a$$

整理して

$$6a^2 - 9\pi a + 4 = 0 \quad \cdots\cdots①$$

①の左辺を $f(a)$ とおくと，$f(1) = 10 - 9\pi < 0$ より

①は 1 より大きい解と 1 より小さい解を 1 つずつもつ。

①を解いて，

$$a = \frac{9\pi \pm \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$$

$a > 1$ から　$a = \dfrac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$

2　終わりに

今回の研究では，ほんの少ししか入試問題に触れることができなかったが，東京大学，京都大学がやはり頭 1 つ抜けていることを実感できた。この 2 大学については，ほとんど解説とにらめっこ状態になっていた。難問ではあるが，納得がいったときの面白さ，楽しさを味わうことができた。この楽しさを生徒に伝えることができるように，日々の業務の中で，今後も入試問題を解く時間を作っていきたいと思う。

【参考文献】

全国大学入試問題正解　2025/2024/2023年度受験用