令和６年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立宇和島南中等教育学校　岡　颯天

1　はじめに

今年度は５月 11 日（土）に愛媛大学理学部平野幹教授による，令和６年度愛媛大学入試問題の説明会が行われた。解説の中での教授のコメントをまとめながら問題の分析を行った。

2　出題傾向

⑴　問題数および試験時間

前期日程は理型，文型ともに３題ずつの問題構成である。試験時間は教育学部，農学部，工学部（文理型入試）は 100 分，理学部，工学部，医学部医学科は 120 分であった。後期試験についても３題出題されている。全てにおいて小問集合１題，記述式２題の構成になっている。基本的な問題を多く出題しており，教科書の基本事項を習得してほしいとのことであった。

⑵　出題内容

前期日程

番号	科目	内容
1	AⅡB	微分法，三角関数，数列 確率，高次方程式と複素数
2	ⅡB	数学的帰納法，不等式の証明 対数関数，領域，図形と方程式
3	ⅡB	空間ベクトル，微分法，積分法
4	AⅢ	確率，複素数平面，楕円， 積分法，極限
5	ⅡBⅢ	数学的帰納法，微分法，領域 図形と方程式
6	ⅡⅢ	平面ベクトル，極限，積分法

選択問題

教育学部（ⅠAⅡB 受験者），農学部，工学部（文理型入試）

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$

教育学部（ⅠAⅡBⅢ受験者）

$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$

理学部，工学部（理系入試），医学部医学科

$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$

後期日程（理学部，工学部）

番号	科目	内容
1	AⅡⅢ	極限，微分法，積分法，確率
2	ⅡⅢ	不等式の証明，極限，微分法の応用 複素数平面，無限等比級数
3	BⅢ	平面ベクトル，微分法

⑶　出題者の意図

評価のポイント

1　基本的な事項が理解できているか
2　基本的な計算が身に付いているか
3　応用力を身に付けているか
4　論理的に考察し，論述できるか

の４つの観点を基準に，バランスよく評価するための問題が出題されている。特定の範囲に偏らず、まんべんなく全分野の勉強をして臨んでほしいとのことである。また，共通テストで見ることができない部分を問うという意図があり，特に理型の問題は数学Ⅲの内容が基本となる。

問題数は従来と変更せず，多すぎない設定である。テクニックだけで乗り切るのではなく，内容を正確に読み理解し，イメージする力を大事にし，その上で論理的な記述ができるよう表現力の向上にも努めてほしいと言われていた。また，部分点狙いの解答が多く見られ，論証力の低下を感じるそうである。上辺の理解ではなく，地に足の着いた数学力を身に付けることを期待したいとのことである。反射的に解答を始めるのではなく，思考して解く習慣を付けさせたい。

3　問題分析

前期日程

$\boxed{1}$　以下の問いに答えよ。

⑴　関数 $f(x)=-x^3+3x-1$ の極値を求めよ。

⑵　$0\leqq x<\pi$ のとき，方程式 $4\sin x\cos x=\sqrt{3}$ を解け。

⑶　第２項が６で，初項から第３項までの和が 21 であり，公比が１より小さい等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

⑷　３個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

（ｉ）出た目の積が奇数になる確率

（ⅱ）出た目の積が４の倍数になる確率

⑸　a，b を実数とし，i を虚数単位とする。$1+i$ が３次方程式 $x^3+ax^2-4x+b=0$ の解であるとき，a，b の値を求めよ。

【考察】

全ての問題が教科書の問や練習問題で扱われる難易度の問題であった。$\boxed{1}$ は奇をてらう問題は出さず，基礎知識と計算力を問うという出題意図だと言われていたため，確実に得点できるよう演習する必要がある。

⑷ は同様に確からしい事象における確率の問題である。特に(ⅱ)では全体像をつかむことで，数え漏らしを防ぐことに気を付けることが大切な問題である。積が４の倍数になるためには偶数が２個以上出ればよいため，計算が煩雑になる。余事象の確率で考えるという判断ができるようにしたい。

⑸ は高次方程式と虚数解の問題である。実数係数の３次方程式で虚数解をもつときは，それと共役な複素数も解にもつが，この事実は高校生の知識では正しく説明ができない。そのため，解答として適用するのはどうかという指摘があった。$1+i$ を代入し，(実部)$=0$，(虚部)$=0$として解くのが素直な解答である。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n が自然数のとき，$3^{n+1}+7^n$ が4の倍数であることを証明せよ。

(2) s，t を $s>t>0$ を満たす実数とする。

(i) 不等式 $\dfrac{s+t}{2}>\sqrt{st}$ が成り立つことを証明せよ。

(ii) $\log_{10}\dfrac{s+t}{2}$ と $\dfrac{\log_{10}s+\log_{10}t}{2}$ の大小を調べよ。

(3) 連立不等式 $\begin{cases}2x-y<0\\x+y>0\end{cases}$ の表す領域を D とする。

(i) D を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は領域 D 内にあるとする。Pを中心とする半径1の円が，2直線 $2x-y=0$，$x+y=0$ の両方に接するとき，s と t の値を求めよ。

【考察】

(1) は数学的帰納法を用いて証明する問題である。自然数に関する証明問題の数ある手法の中から，数学的帰納法を選択できるかがまず問われている。証明そのものは典型的な問題であるが，論証力の低くなっている受験生が多くみられるため，適切な論理を組み立てられるようにしておきたい。

(2) の(i)は(左辺)－(右辺)が0より大きいことを変形により示す，または相加平均・相乗平均の大小関係を使い示す，といった教科書の練習問題レベルの問題である。(ii)については，(i)の事実を使うことと，対数関数の性質である底が1より大きいとき，$0<a<b \Leftrightarrow \log_{10}a<\log_{10}b$ ということに触れておきたい。(i)，(ii)のいずれにおいても，正しい論証が問われている。

(3) は領域を求める問題と，それに伴う条件を満たす点を求める問題である。まず，領域を図示する問題では正確に書くことが求められる。必要な位置情報が何かを日頃から意識しておきたい。(ii)では代数的には円の中心と直線の距離が円の半径と等しくなるという解法が自然である。図形的なイメージをしっかり持ち，解答に臨むようにしたい。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) t を実数とする。座標空間に3点 $\mathrm{A}(-2,\ 0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{B}(0,\ -2,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{C}(t,\ t,\ 0)$ がある。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とする。

(i) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(ii) $\sin\theta$ を t を用いて表せ。

(iii) S を t を用いて表せ。

(iv) S の最小値を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-\dfrac{3}{4}$ を C とする。C 上の点Pにおける C の接線を ℓ とし，ℓ の傾きは1であるとする。また，放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S とし，放物線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。

(i) 点Pの座標および接線 ℓ の方程式を求めよ。

(ii) S の値を求めよ。

(iii) T の値を求めよ。

(iv) S と T の値の大小を調べよ。

【考察】

$\boxed{3}$ は，(1) 空間ベクトル，(2) 積分法の総合問題である。

(1)では内積の計算やベクトルの大きさを用いての余弦定理と相互関係による計算，面積の公式を用いた面積計算，平方完成を用いて最小値を求めるといった，空間ベクトルの問題でありながら，各分野の基本的な計算ができれば解くことができる問題であった。誘導通りに解き進めることができれば，図形的イメージがなくても解くことができる問題でもあるが，指導する際は，図形的なイメージを持たせるよう工夫したい。

(2) は放物線の接線を求め，それと放物線によって囲まれる図形の面積を求める問題である。放物線のグラフも基本的なもので，図を書きやすく，状況整理がしやすい問題である。

(iii) では，$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(x^2-\frac{3}{4}\right)-(x-1)\right\}dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}-(x-1)dx$ と求めるのではなく，接点から x 軸におろした垂線と x 軸，接線によって作られる三角形から一部を引くという解法の方が計算の負担が減るため，気付き解答として採用したい。

$\boxed{4}$ 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) i を虚数単位とする。$z=\sqrt{3}+i$ のとき，$\dfrac{1}{z}$ の絶対値は $\boxed{(ア)}$ であり，また，iz の偏角 θ は $\boxed{(イ)}$ である。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ 上の点 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ における接線の方程式が $y=ax+b$ であるとき，$a=\boxed{(ウ)}$，$b=\boxed{(エ)}$ である。

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\, d\theta=\boxed{(オ)}$ であり，$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\boxed{(カ)}$ である。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\boxed{(キ)}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{(2x-1)(2x+1)}=\boxed{(ク)}$ である。

(5) 3個のさいころを同時に投げるとき，出た目の積が奇数になる確率は $\boxed{(ケ)}$ であり，出た目の積が4の倍数になる確率は $\boxed{(コ)}$ である。

【考察】

理系生徒の小問集合の問題で，数学Ⅲの内容が中心に出題されている。共通テストの不足部分として数学Ⅲの分野についての基礎学力を確認するために出題されている。複素数平面や2次曲線，三角関数の積分法，極限の問題など学習内容がまんべんなく出題されている。特に，複素数平面は苦手な生徒が多い印象があると言われていた。教科書の練習問題レベルの問題を確実に解くことができるよう演習を積んでおく必要を感じる。

一方で，公式ありきの解答では理学部生徒としては寂しいとも言われていた。接線の公式の導出ができるかどうかや，区分求積的考えが問題に含まれていることにも考えを巡らせてほしいとのことであった。

$\boxed{5}$ 以下の問いに答えよ。

(1)　n が自然数のとき，$3^{n+1}+7^n$ が 4 の倍数であることを証明せよ。

(2)　関数 $f(x)=|x^3\cos x|$ が $x=0$ で微分可能かどうか調べよ。

(3)　連立不等式 $\begin{cases} 2x-y<0 \\ x+y>0 \end{cases}$ の表す領域を D とする。

(i)　D を座標平面上に図示せよ。

(ii)　点 $\mathrm{P}(s, t)$ は領域 D 内にあるとする。P を中心とする半径 1 の円が，2 直線 $2x-y=0$，$x+y=0$ の両方に接するとき，s と t の値を求めよ。

【考察】

(1)，(3) は $\boxed{2}$ の (1)，(3) と同じ問題である。

(2) では，関数の微分可能と連続に関する証明問題である。まず，微分可能の定義が分かっているかを問うているが，指導においてないがしろにされている部分で，出来が悪い問題だと言われていた。定義を理解することは数学の中で最も重要な部分なので，口酸っぱく言い続けてほしいと言われていた。定義を理解して話をすることは，問題を客観的に捉え，話ができるということにつながるため，社会に出ても必要な能力だと言われていた。苦手意識を持つ生徒が多い分野であるが，根気強く指導していくことが大切であると改めて感じた。

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1)　O を原点とする座標平面上に

点 $\mathrm{A}_n(x_n, y_n)$ および点 $\mathrm{B}_n(-y_n, x_n)$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$

がある。ただし，$x_1=y_1=1$ とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする。

(i)　x_2，y_2，x_3，y_3 の値を求めよ。

(ii)　$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ は $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$ が直角の直角二等辺三角形であることを証明せよ。

(iii)　$r_n=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\right|$ とおくとき，r_n を n を用いて表せ。

(iv)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right|$ を求めよ。

(2)　a，b を実数とし，t を正の実数とする。関数 $y=\log x$ のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる曲線を C とする。また，C は点 $\mathrm{P}(t, t)$ において，直線 $y=x$ に接しているとする。曲線 C と直線 $y=x$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とし，曲線 C t 直線 $x=t$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。

(i)　a，b を t を用いて表せ。

(ii)　曲線 C と x 軸の交点の x 座標を t を用いて表せ。

(iii)　(a)　A を実数とするとき，不定積分 $\displaystyle\int \log(x+A)\,dx$ を求めよ。

(b)　T を t を用いて表せ。

(iv)　極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S}{T^2}$ を求めよ。

【考察】

(1) は平面ベクトルと数列の極限の融合問題，(2) は微分法・積分法の応用と極限の問題である。点 A_n と点 B_n の関係など，文章から正確に図を読みとることができるかがまず問われている。(1) で具体的に値を求めていく誘導があるが，なかったとしても丁寧に求め，まず適切に状況を掴みたい。図が適切に書ければ，数値計算をせず，関係式を求めることもできるため，丁寧な図を書くことを心掛けたい。

(2) は接線の方程式，対数関数の積分法，関数の極限と，図を用いなくても計算のみで答えを求めることができる問題である。問題集等を活用し，基本計算を素早く確実にできるよう演習しておくことが重要であると感じる。

しかし，重ねてではあるが，ただ解けるだけでなく与えられた条件から状況をよく考察して問題に臨む，数学的洞察力の重要性にも触れられていた。図を活用し，状況を適切に整理する習慣を身に付けておきたい。

後期日程

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\boxed{(ア)}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\log 3x}{\log 2x}=\boxed{(イ)}$ である。

(2)　$f(x)=3\sin 2x+\tan x$ のとき，$f'(0)=\boxed{(ウ)}$ であり，$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\boxed{(エ)}$ である。

(3)　$\displaystyle\int_0^2 xe^{2x^2}dx=\boxed{(オ)}$ であり，$\displaystyle\int_0^2 x^3e^{2x^2}dx=\boxed{(カ)}$ である。

(4)　関数 $f(x)=x^2-4|x-1|+2$ は $x=\boxed{(キ)}$ で最小となり，$x=\boxed{(ク)}$ で極大となる。

(5)　1 円と 10 円の硬貨がそれぞれ 4 枚あり，これら 8 枚の硬貨を横 1 列に並べる。ただし，同じ金額の硬貨は区別しないものとする。このとき，少なくとも一方の金額の硬貨が 2 枚以上続く並べ方は全部で $\boxed{(ケ)}$ 通りある。また，左から 4 枚の硬貨の金額の合計 n 円とするとき，n が素数となる並べ方で全部で $\boxed{(コ)}$ 通りである。

【考察】

例年同様，理系の受験生のみの実施であるので，小問集合は数学Ⅲの内容が中心である。数学Ⅲの学力で勝負できる人材を選抜することを狙っているとのことであった。内容は基本から標準の問題で正確に解く力を問うている。教科書や問題集の演習で十分対応できる問題なので，確実に正解したい。(5) の順列の問題では，特に (コ) の問題で数え漏らしがないかに注意しなければならない。いきなり解答を作るのではなく，数え上げを行った上で解答を作っていきたい。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $x>1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(i) $x\log x > x-1$

(ii) $x^{\frac{x}{x-1}}>e$

(2) 複素数平面上に異なる3点O(0)，A(α)，B(β)があり，複素数 α，β は等式 $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ を見たすとする。

(i) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値をすべて求めよ。

(ii) △OAB は正三角形であることを証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ は公比が r の等比数列で，2つの等式

$$\sum_{n=!}^{\infty} a_n=-2, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=6$$

を満たすとする。このとき，a_1 および r の値を求めよ。

【考察】

前期試験同様，論証する力を図ることを主とした問題が中心となっている。(1)は微分による関数の単調増加性による証明と，その事実と関数 $y=e^x$ の単調増加性を用いた証明である。問題文に対数関数が出されているが，$y=e^x$ は出されていないため，そこを思いついて解くことができるとよいとのことであった。(2)は複素数平面の回転の性質を用いた証明問題で，複素数平面の良さが感じられる問題である。$\dfrac{\beta}{\alpha}=z$ とおくことで，z の2次方程式として扱えるため，処理がしやすくなることに気付きたい。また，正三角形の証明のため，原点からの距離がそのままの $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転であることを示せばよいことを理解して，式変形していきたい。(3)は無限等比級数に関する問題である。問題文に $\{a_n\}$ は等比数列と書いているが，$\{|a_n|\}$ が等比数列とは明示されていないので，そこに触れて解答を作っていく必要があると言われていた。絶対値を含むので，r の値によって場合分けが必要であることに気付き，解答を作っていくことが求められる。

$\boxed{3}$ 1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF がある。s，t を実数とし，点 P，Q は

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AE}$

を満たすとする。また，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{f}$ とする。

以下の問いに答えよ。

(1) 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(i) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{f}$ の値は $\boxed{(ア)}$ である。

(ii) $\overrightarrow{BC}$ および $\overrightarrow{AC}$ を，$\overrightarrow{BC}=k\vec{b}+\ell\vec{f}$，$\overrightarrow{AC}=m\vec{b}+n\vec{f}$ と表すとき，$k=\boxed{(イ)}$，$\ell=\boxed{(ウ)}$，$m=\boxed{(エ)}$，$n=\boxed{(オ)}$ である。

(2) (i) $\overrightarrow{AP}$ および $\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{f}$，s，t を用いて表せ。

(ii) 内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ を s，t を用いて表せ。

(iii) $|\overrightarrow{AP}|$ および $|\overrightarrow{AQ}|$ を s，t を用いて表せ。

(3) $t\geqq 0$ とし，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ は垂直であるとする。また，△APQ の面積を S とする。

(i) s を t を用いて表せ。

(ii) S を t を用いて表せ。

(iii) S の最小値を求めよ。

【考察】

平面ベクトルに関する総合問題で，分数関数の微分法を含む面積の最小値を求める問題である。(2)までは基本的なベクトルの長さや内積の計算であるため，確実に正解したい。(3)も2つのベクトルが垂直のときに成り立つ条件に従い立式し，計算していくのみである。S が $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AQ}$ より，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|$ だけで求めることができるので，設問の流れを汲んで解く必要を感じる。(3)の $t\geqq 0$ の範囲設定は問題を解くための人為的な設定であるため，s，t の自然な範囲設定についても考えてみてほしいと言われていた。

4 まとめ

例年通り全ての問題を通して，基本的な知識・理解を問う問題となっており，受験生の努力の成果を図ることができる良問であった。その中で，どの受験生に対しても論証問題を出題するなど，答えを求められれば良いという，テクニック重視の勉強をする生徒に対して，警鐘を鳴らす意図を感じられた。なぜ公式が成り立つのか，与えられた状況からしっかり考察した上で立式する，証明問題のそれぞれの言葉にはどういう意味が込められているのかを考えるなど，思考する習慣を日頃から養うことの重要性を感じた。思考力向上のためにも問題に対し，様々なアプローチがあることを意識させて解くことで，生徒の数学力を向上させ，進路実現につなげていきたい。