国公立大学の入試問題の研究
－ 難関大学の入試問題（文系） －

愛媛県立宇和島東高等学校　赤松　弘教

１　はじめに

昨年度，合同大学説明会に参加した。その際に，各大学における入試科目において，得点に差が出る科目を聞いた。大学担当者は，「文系学部を受験する生徒の多くは，国語や英語の得点率は比較的高い。差が出る科目は社会と数学であり，特に数学の得点率に最も差が出ている。」と答えられていた。そこで，難関大学の文系学部の合格のカギは，数学にあると考えた。

研究を通して，文系生徒に必要な数学の力を理解し，ポイントを抑えた授業実践につながると考え，本研究のテーマを設定した。

２　出題内容一覧

今回の研究にあたり，難関大学である 9 大学の 2020 年度から 2024 年度の 5 年間の入試問題について，出題内容をまとめた。（東京大学と京都大学は 7 年間分を記載している。）

【北海道大学】

問題	2024年	2023年	2022年
1	整数の性質	式と証明	高次不等式
2	数列	平面ベクトル	数列
3	微・積分法	確率	図形と計量
4	確率	微・積分法	確率

問題	2021年	2020年
1	数列	図形と方程式
2	平面ベクトル	三角関数
3	三角関数	確率・整数の性質
4	微・積分法	微・積分法

【東北大学】

問題	2024年	2023年	2022年
1	微・積分法	確率	場合の数
2	三角関数・図形の性質	図形と計量	微・積分法
3	対数関数	2 次関数	図形と方程式
4	数列・整数の性質	微・積分法	空間ベクトル

問題	2021年	2020年
1	2 次関数・図形と方程式	微・積分法
2	場合の数	数列・整数の性質
3	図形と計量	図形と方程式
4	微・積分法	ベクトル・確率

【東京大学】

問題	2024年	2023年
1	図形と方程式・微・積分法	数と式
2	指数・対数関数	微・積分法
3	三角関数・高次方程式	確率
4	確率	空間図形

【東京大学】

問題	2022年	2021年	2020年
1	図形と方程式	微分法	微分法・不等式
2	図形と方程式・微分法	場合の数	場合の数
3	数列・整数の性質	図形と方程式	図形と方程式
4	確率	整数の性質	数列

問題	2019年	2018年
1	図形と方程式・微分法	図形と方程式
2	ベクトル・積分法・図形と方程式	整数の性質・数列
3	確率	図形と方程式・微分法
4	ベクトル・図形と方程式	図形と方程式・積分法

【一橋大学】

問題	2024年	2023年	2020年
1	整数の性質・数列	整数の性質	整数の性質
2	微・積分法	微分法	三角関数
3	式と証明	空間ベクトル	平面ベクトル
4	空間ベクトル	図形と方程式・数列	積分法
5	確率	確率・数列	確率・数列

問題	2022年	2021年
1	整数の性質	場合の数・整数の性質
2	図形と方程式・三角関数・微分法	数列
3	集合と命題・図形と方程式	2 次関数・図形と方程式
4	空間ベクトル	図形と方程式・微・積分法
5	確率・数列	確率・整数の性質・積分法

【名古屋大学】

問題	2024年	2023年	2022年
1	高次方程式	微分法	式と証明・微・積分法
2	2 次関数	図形の性質・式と証明	確率・整数の性質
3	確率	確率	微・積分法

問題	2021年	2020年
1	微・積分法	2 次関数・微・積分法
2	対数関数・高次方程式	空間ベクトル
3	確率	場合の数・数列

【京都大学】

問題	2024年	2023年	2022年
1	図形と計量	確率・数と式	対数関数
2	確率	空間ベクトル	場合の数・数列
3	2 次関数	三角関数	微・積分法
4	整数の性質・対数関数	数列	図形と方程式
5	積分法	積分法	ベクトル

【京都大学】

問題	2021年	2020年
1	整数の性質・ベクトル	積分法
2	積分法	微分法
3	確率・数列	整数の性質
4	空間ベクトル	空間ベクトル
5	整数の性質	場合の数

問題	2019年	2018年
1	式と証明・対数関数	微・積分法
2	2次関数	図形と計量・微分法
3	2次関数・図形と方程式	整数の性質
4	確率・数列	空間図形
5	微分法	確率・数列

【大阪大学】

問題	2024年	2023年
1	積分法・2次関数	三角関数・2次関数・図形と方程式
2	ベクトル	対数関数・微分法
3	整数の性質・数列	ベクトル・図形と方程式

問題	2022年	2021年
1	平面ベクトル	微分法・式と証明・図形と方程式
2	確率・整数の性質	空間ベクトル
3	数と式・積分法	整数の性質・積分法

問題	2020年
1	微分法・三角関数・2次関数
2	確率・数列
3	図形と計量・式と証明・三角関数

【神戸大学】

問題	2024年	2023年
1	微分法・数列・対数関数	2次関数
2	確率	確率
3	図形と方程式	図形と方程式・整数の性質

問題	2022年	2021年
1	2次関数・積分法	整数の性質・数列
2	図形と方程式	式と証明
3	指数・対数関数・整数の性質	図形と計量

問題	2020年
1	微・積分法
2	2次関数・数列
3	場合の数

【九州大学】

問題	2024年	2023年	2022年
1	微・積分法	積分法	積分法
2	平面ベクトル	微分法	ベクトル
3	整数の性質	平面ベクトル	高次方程式
4	場合の数	確率	微・積分法

問題	2021年	2020年
1	図形と方程式	微・積分法
2	2次関数	空間図形
3	積分法	高次方程式
4	数列	確率

数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bの各分野からバランスよく出題されている。過去5年間の統計として，出題が多かった分野（上位6番まで）は以下のとおりである。「微・積分法（54題）」，「場合の数・確率（40題）」，「図形と方程式（29題）」，「整数の性質（26題）」，「数列（25題）」，「ベクトル（23題）」であった。もう1つ特徴的であったのは，1つの分野単体でなく，複数の分野と複合した出題が多いことである。また，多くの問題は教科書で学習する内容から発展させた内容が多いように感じた。

さらに，答案を書く中で，その理由や論理を組み立てていくことも重要であると感じた。解答として自らの考えを原理・原則に基づいて解法を記述する力が求められているのではないだろうか。

また，ほとんどの問題に図が記されていない。正確に図示することは，隠された定理や性質に気付き，正答率を上げるためには必須事項である。与えられた条件からどのように図示し，解法につなげられるかは重要である。昨年度の問題を中心に，これについてもいくつか取り上げることとする。

3　具体的な出題内容①（微分法・積分法）

最も出題が多い分野である「微分法・積分法」についての攻略は，文系生徒の志望校合格には必須事項ではないだろうか。まず，教科書で学習するような基礎的な問題について取り上げる。

＜2024年　北海道大学　前期日程　第3問＞

a を0でない実数とする。C を $y=-x^3+x^2$ で表される曲線，l を $y=a$ で表される直線とし，C と l は共有点をちょうど2つもつとする。

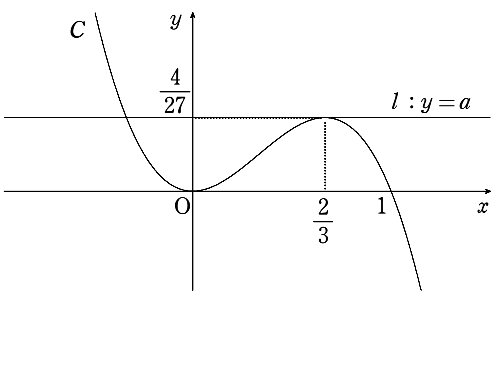
(1)　a の値を求めよ。

(2)　C と l の共有点の x 座標をすべて求めよ。

(3)　C と l で囲まれた図形の面積を求めよ。

(略解)

(1)　$a=\dfrac{4}{27}$



(2)　$-x^3+x^2=\dfrac{4}{27} \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=0$

よって，$x=\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{1}{3}$

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-(-x^3+x^2)\right\}dx$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)+1\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

教科書に出てくるような典型的な問題であるのでしっかりと正解したい。また，ただ正解するだけでなく，早く答えを導きたい問題である。そのためのポイントが 2 点ある。

1 点目は，(2) の式変形である。$x=\dfrac{2}{3}$ で接するので，$\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2$を因数にもつことを理解し，定数項の数字から残りの因数を見つけられるようになりたい。

2 点目は$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

$$=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

を理解して使いこなせているかである。定積分の計算は，理解しているとかなり早く容易に行うことができる。ただ解答を作り答えを合わすだけでなく，原則を理解した上で公式利用できるようになる必要がある。そうすれば，残りの時間を他の問題に使うことができ，得点率を上げられるのではないだろうか。

> ＜2024 年　一橋大学　前期日程　第 2 問＞
> a，b を実数とする。曲線 $C:y=x^2$ と曲線 $C':y=-x^2+ax+b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

(略解)

$f(x)=x^2$，$g(x)=-x^2+ax+b$，共有点の x 座標を t とおく。2 つの曲線の共有点における接線が直交する条件は，

$\begin{cases} f(t)=g(t) & \cdots\cdots ① \\ f'(t)g'(t)=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　が成り立つことである。

$\Leftrightarrow\begin{cases} 4t^2-2at-1=0 & \cdots\cdots ①' \\ 2b=1 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} t=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{4} & \cdots\cdots ③ \\ b=\dfrac{1}{2}\quad (a \text{ は任意の実数}) \end{cases}$

③ の 2 つの値を t_1，t_2 $(t_1<t_2)$ とすると，これは，$f(x)-g(x)=0$ の解でもあるので，$f(x)-g(x)=2(x-t_1)(x-t_2)$とできる。$t_1<x<t_2$ において，$f(x)-g(x)<0$から，$f(x)<g(x)$

よって，求める面積は，

$$\int_{t_1}^{t_2}\{g(x)-f(x)\}dx=-2\int_{t_1}^{t_2}(x-t_1)(x-t_2)dx=2\cdot\frac{1}{6}(t_2-t_1)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^3$$

したがって，$a=0$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{3}$

この問題も答えを出すのは容易である。しかし，文字が多くなるため苦手と感じる生徒も多いのではないだろうか。文字がいくら増えようが，原則は変わらないため，体系的な学習による本質的な理解が重要である。また，最小値である $\dfrac{1}{3}$ は求められたが，$f(x)<g(x)$ の理由を明記してない生徒が多いのではないだろうか。

(略解) の下線部を理解できるように丁寧に指導したい。

次に，基本的ではあるが，正確に図示する必要がある求積問題について取り上げる。

> ＜2024 年　京都大学　前期日程　第 5 問＞
> 関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフの $x>1$ の部分を C とする。このとき，下の条件を満たすような正の実数 a，b について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ。
> 「C と直線 $y=ax+b$ は二つの異なる共有点を持つ」

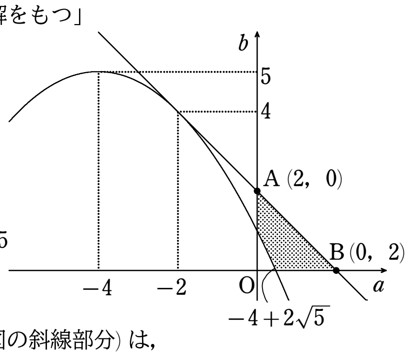
(略解)

「C と直線 $y=ax+b$ は 2 つの異なる共有点を持つ」

$\Leftrightarrow$「方程式 $f(x)=x^2-(a+4)x-b+5=0$ が $x>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつ」

$\Leftrightarrow\begin{cases} f(1)>0 \\ \text{軸}>1 \\ \text{判別式 } D>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 0<b<-a+2 \\ 0<a \\ b>-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5 \end{cases}$



よって，求める面積 (図の斜線部分) は，

$$\triangle\mathrm{OAB}-\int_0^{-4+2\sqrt{5}}\left\{-\frac{(a+4)^2}{4}+5\right\}da=\frac{50-20\sqrt{5}}{3}$$

この問題は 2024 年の京都大学の入試問題では，唯一の典型問題である。しっかりと完答したい問題である。ポイントは以下の 3 点である。

1 点目は，「C と直線 $y=ax+b$ は 2 つの異なる共有点を持つ」

$\Leftrightarrow$「方程式 $f(x)=x^2-(a+4)x-b+5=0$ が $x>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつ」

の同値変換を行い，実数解の存在問題であるに気付くことができたかどうかである。

2 点目は，求積の問題を純粋に積分計算だけでなく，三角形か

らのぞく方法で求積できたかどうかである。求積問題は，どのように面積を求めるかで積分計算の難易度が大きく変化する。そのため，放物線と直線が接することに気付いて正確に図示することが重要である。正確に図示することができれば，この解法に気付けるはずだ。

3 点目は，最後の積分計算である。その前の条件で平方完成を行っているはずである。最後の積分計算を

$\int_0^{-4+2\sqrt{5}}\left\{-\frac{(a+4)^2}{4}+5\right\}da$ か，$\int_0^{-4+2\sqrt{5}}\left(-\frac{a^2}{4}-2a+1\right)da$ とするのかどうかで積分した後の代入計算の手間が大きく変わるのはいうまでもないだろう。

＜2024 年　大阪大学　前期日程　第 1 問＞

曲線 $y=|x^2-1|$ を C，直線 $y=2a(x+1)$ を l とする。ただし，a は，$0<a<1$ を満たす実数とする。

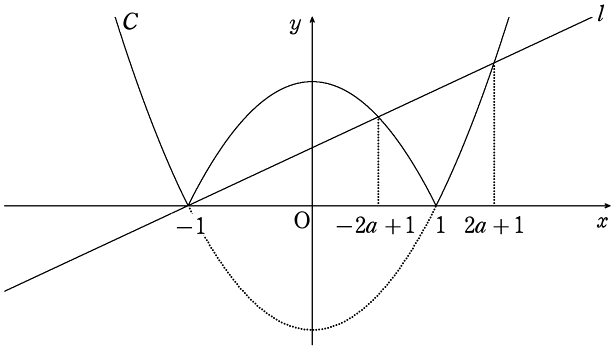
(1)　曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ。

(略解)

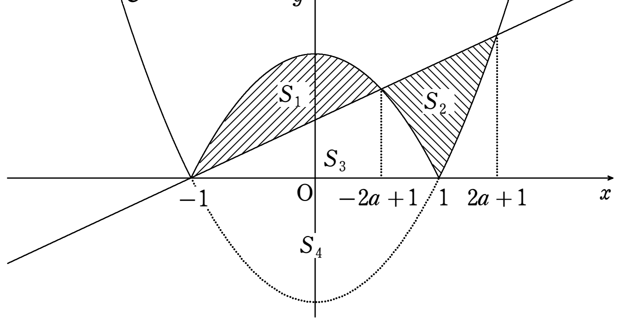
(1)　$C:y=\begin{cases} x^2-1 & (x\leqq -1,\ 1\leqq x) \\ -x^2+1 & (-1<x<1) \end{cases}$

$l:y=2a(x+1)\quad(0<a<1)$



よって，$(-1,\ 0)$，$(-2a+1,\ -4a(a-1))$，$(2a+1,\ 4a(a+1))$

(2)　下図のように S_1，S_2，S_3，S_4 とする。



曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる

$\Leftrightarrow S_1=S_2$　……①

$\Leftrightarrow S_1+S_3+S_4=S_2+S_3+S_4$

$\Leftrightarrow 2S_4=S_2+S_3+S_4$　……②　($S_1+S_3=S_4$ より)

$$2S_4=2\int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}dx$$

$$=-2\int_{-1}^{1}(x-1)(x+1)dx=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-1)\}^3=\frac{2^3}{3}$$

$$S_2+S_3+S_4=\int_{-1}^{2a+1}\{2a(x+1)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2a+1}(x+1)(x-2a-1)dx$$

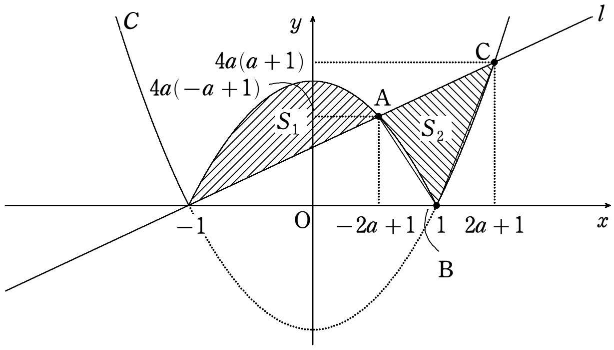
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(2a+1)-(-1)\}^3=\frac{2^2}{3}(a+1)^3$$

① または ② となる条件は，

$$\frac{2^2}{3}(a+1)^3=\frac{2^3}{3}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{2}-1$$

【別解】

下図のように，3 点 A，B，C をとる。



$$S_2=\triangle\mathrm{ABC}-\int_{-2a+1}^{1}\{-(x+2a-1)(x-1)\}dx+\int_{1}^{2a+1}\{-(x-1)(x-2a-1)\}dx$$

$$=\triangle\mathrm{ABC}-\frac{1}{6}(2a)^3+\frac{1}{6}(2a)^3$$

$$=\triangle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2a(1+1)\cdot\{(2a+1)-(-2a+1)\}=8a^2$$

曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる

$\Leftrightarrow S_1=S_2$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}(-a+1)^3=8a^2$

$\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{2}-1$

この問題も (2) の求積問題をどのように求めるかがポイントとなる。そのため，$a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ の変形を活用できる図形を探すことが重要である。答えを出せるだけでなく，いかに容易に計算し，迅速かつ正確に積分計算を行い，面積を求めることができるかが積分 (求積問題) 攻略のカギとなりそうである。

そのためには，日頃の授業からその考え方を実践し続ける必要があるのではないだろうか。

4　具体的な出題内容②（分野複合問題）

単体の分野ではなく，いくつかの分野が融合した複合問題について取り上げる。

まずは，三角関数と図形の性質についての複合問題である定番の組み合わせについて取り上げる。

＜2024 年　東北大学　前期日程　第２問＞

a，b，d を正の実数とし，xy 平面上の点 O $(0,\ 0)$，A $(a,\ 0)$，B $(b,\ 0)$，D $(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする。

$$\angle \mathrm{OAD}=15^\circ,\ \angle \mathrm{OBD}=75^\circ,\ \mathrm{AB}=6$$

以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan 75^\circ$ の値を求めよ。

(2)　a，b，c の値をそれぞれ求めよ。

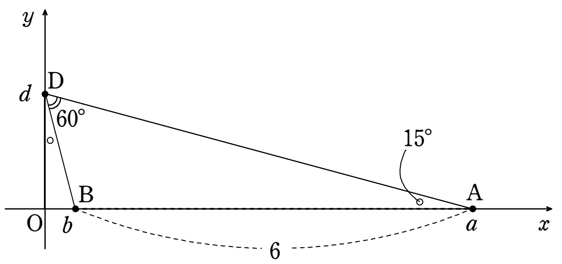
(3)　2 点 O，D を直径の両端とする円を C とする。線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする。また，線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする。このとき，方べきの定理 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2$，$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$ を示せ。

(4)　(3) の点 P，Q に対し，積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}$ の値を求めよ。

(略解)

(1)　$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=2+\sqrt{3}$

(2)



直角三角形 OAD について，

$\mathrm{OA}=\mathrm{OD}\tan 75^\circ$ から，$a=(2+\sqrt{3})d$　…… ①

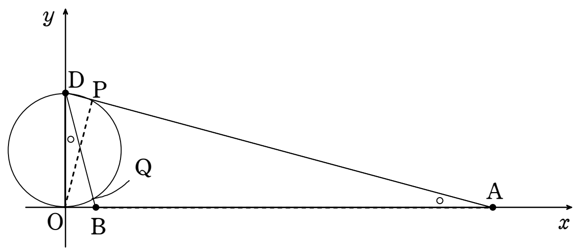
直角三角形 ODB について，

$\mathrm{OB}=\dfrac{\mathrm{OD}}{\tan 75^\circ}$ から，$b=(2-\sqrt{3})d$　…… ②

①，② から，$\mathrm{AB}=a-b=2\sqrt{3}d=6$ から，$d=\sqrt{3}$

したがって，$a=2\sqrt{3}+3$，$b=2\sqrt{3}-3$

(3)



$\triangle\mathrm{OAD}\backsim\triangle\mathrm{PAO}$ であるので，

$\mathrm{OA}:\mathrm{PA}=\mathrm{AD}:\mathrm{AO}\iff\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2$

同様に，$\triangle\mathrm{ODB}\backsim\triangle\mathrm{QOB}$ であるので，

$\mathrm{OB}:\mathrm{QB}=\mathrm{DB}:\mathrm{OB}\iff\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$

(4)　(3) から，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\dfrac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}}$

$$=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2b^2+(a^2+b^2)d^2+d^4}}$$

(2) より，$a+b=4\sqrt{3}$，$ab=3$，$d^2=3$

したがって，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\dfrac{3}{4}$

直角三角形や，三角比の定義から辺の長さを求められたか，また，相似に気付き，証明できたかどうかがポイントである。

さらに，最後の AP·BQ の値を求めるときに，対称式の考えを用いると計算が容易である。三角比や三角関数，図形の性質は複合された出題が多いため，日頃から広い視野で問題を解くことが重要ではないだろうか。

次に，微分法と数列 (漸化式)，対数関数についての複合問題を取り上げる。

＜2024 年　神戸大学　前期課程　第 1 問＞

各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。a_1 は関数 $y=\dfrac{1}{3}x^3-10x$　$(x\geqq 0)$ が最小値をとるときの x の値とする。a_{n+1} は関数 $y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx$　$(x\geqq 0)$ が最小値をとるときの x の値とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log_{10}a_n$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 と b_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(4)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(5)　$\dfrac{a_1a_2a_3}{100}$ の値を求めよ。

(略解)

(1)　正の定数 a に対して，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-10ax$　$(x\geqq 0)$ とおく。

$f'(x)=x^2-10a=(x+\sqrt{10a})(x-\sqrt{10a})$ であるので，

$0<x<\sqrt{10a}$ のとき，$f'(x)<0$

$\sqrt{10a}<x$ のとき，$f'(x)>0$

であるので，$f(x)$ は $x=\sqrt{10a}$ のとき，最小である。

したがって，$a_1=\sqrt{10}$，$b_1=\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) から，$a_{n+1}=\sqrt{10a_n}$

(3)　(2) から，$b_{n+1}=\log_{10}a_{n+1}$

$$=\frac{1}{2}(1+\log_{10}a_n)=\frac{1}{2}(1+b_n)\quad\cdots\cdots ①$$

(4)　① から，$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(b_n-1)$ であるので，

$$b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$b_1=\dfrac{1}{2}$ であるので，$b_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(5)　$\log_{10}\dfrac{a_1a_2a_3}{100}=\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3-2$

$$=b_1+b_2+b_3-2=\frac{1}{8}$$

したがって，$\dfrac{a_1a_2a_3}{100}=10^{\frac{1}{8}}$

問題の設定に戸惑うかもしれないが，丁寧な誘導があるため，比較的解きやすい。しかし，ほとんどの生徒が，(1)，(2) を解くときに，微分して増減表を作り，最小値を求めたのではないだろうか。以下のように考えると良い。

$x=a$ で極小値（今回は最小値）をとる

$\iff x<a$ のとき，$f'(x)<0$ かつ $a<x$ のとき，$f'(x)>0$

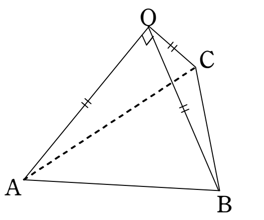
を利用できたら解法が簡素化できる。平素の授業から，微分係数の意味や定義など，原理・原則の理解が重要である。

5　具体的な出題内容③（その他）

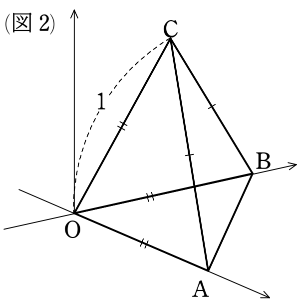
様々な分野から押さえておきたいポイントをいくつか取り上げる。まずは，図形の描き方についてである。

＜2024 年　京都大学　前期日程　第 1 問＞
四面体 OABC が次を満たすものとする。$OA=OB=OC=1$，$\angle COA=\angle COB=\angle ACB$，$\angle AOB=90°$，このとき，四面体 OABC の体積を求めよ。

(図 1)



(図 2)



生徒の中には，四面体 OABC から，Oを頂点とした四面体 (図 1) を作図した者が多いのではないだろうか。しかし，この問題は (図 2) のように xyz 軸上に図示できると，C が線分 AB の垂直二等分線上にあるので，C $(x,\ x,\ z)$ とおくことができる。後は四面体の高さである z を求めればよいことに気が付くだろう。

平素の授業から，この問題ではこのような図形が良いだろうということを理解しながら図示することが重要ではないだろうか。

次に，解答に根拠をもって丁寧に論述する必要がある確率の問題を取り上げる。

＜2024 年　東京大学　前期日程　第 4 問＞
n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

(方針)

選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含まない事象 (M 通り) を考える。全体の通りは，${}_nC_4$ 通りであるので，求める確率は，$p_n=1-\dfrac{M}{{}_nC_4}$ であり，M を求める。

この (方針) は，ほとんどの生徒が思いついたのではないだろうか。しかしながら，$n=5$ のとき，どの 4 点を選んでも四角形が O を内部に含む。$p_5=1$ となることに気付き，表記した後で，$n \geqq 7$ において数学的帰納法を用いて解法することに気付けた生徒は少ないように思う。その他別解も多数ありそうであるが，(方針) が一般的ではないだろうか。

さらに，$M=n\times{}_{\frac{n-1}{2}}C_3$ をしっかりと理解し，論述できているかどうかも重要なポイントである。また，この問題の四角形を三角形に変えたものが ＜2024 年　一橋大学　前期日程＞でも出題された。

最後にベクトルの問題を取り上げる。

＜2024 年　九州大学　前期日程　第 2 問＞
座標平面上の原点 O$(0,\ 0)$，点 A$(2,\ 1)$ を考える。点 B は第 1 象限にあり，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。
(1)　点 B の座標を求めよ。
(2)　s，t を正の実数とし，$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく，$|\overrightarrow{OC}|=4$ が成り立つとき，s，t の値を求めよ。

(方針)

(1) は，ベクトルの演算から，容易に B$(1,\ 3)$ が分かる。

(2) において，$|\overrightarrow{OC}|=4$ から，$s^2+2st+2t^2=\dfrac{16}{5}\cdots$① が分かり，$\triangle$ OAC と$\triangle$ OBC の面積が等しいので，$2st+3t^2=\dfrac{16}{5}\cdots$② が分かる。①，② を連立して s，t の値を求める。

ここでは，三角形の面積をどのように求めたかがポイントである。図形と方程式の考え方を用いて，点と直線との距離からも面積を求められるが，いささか面倒である。点が与えられているため，三角比の問題として，余弦から正弦の値を求めて求積もできるが，以下の公式を理解して使用できることが重要である。

3 点O，A$(a,\ b)$，B$(c,\ d)$ を頂点とする $\triangle$OAB の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ である。

$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ からの式変形 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ と合わせて，理解して使用できるようになる必要がある。

6　まとめ

今回取り上げた各項目について， 微分法・積分法 に関しては，位置関係を含めてグラフを適切に読み取ることが重要である。また，定積分の求積問題では，どのように求めるかを工夫することで，計算を容易にし，素早く正解を導くことができる。公式もただ利用できるだけでなく，なぜそうなるのかを理解しながら活用できるレベルまで演習する必要がある。

分野複合型の問題に関しては，分野が融合したからといってそれぞれの分野における重要事項が変化することはない。原理・原則に基づいて，定義からの理解を平素の授業においても大切にしたい。定理を教え，解き方を教授する授業スタイルでは，今後の入試には対応が難しいと思われる。平素の授業から体系的な学習が必要であり，多角的に深く考察することで数学の力を上げられるのではないだろうか。

最後に，図形の描き方や問題に応じた表記の違いなど「なぜ」を大切にする必要がある。「なぜ」の追求が自らの解法の論述にもつながるのではないだろうか。平素より「なぜ」を大切に授業を展開し，数学の力を向上させ，生徒の進路実現に努めたい。

7　参考文献

全国大学入試問題正解 $\boxed{5}$ 数学国公立大編 (2019〜2025年受験用)
（旺文社）
大学赤本シリーズ(2019〜2025年版)（数学社）
(北海道・東北・東京・一橋・名古屋・京都・大阪・神戸・九州)