

平成24年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校 近藤 弘法

1 はじめに

5月12日（土）に松山南高等学校において、愛媛大学理学部内藤学教授より平成24年度の愛媛大学数学入試問題の解説があった。今年度の問題の特徴としては、昨年に比べて計算量が増えていることである。これは前期、後期関係なく言えることである。また、最近の生徒が苦手な分野としては、「絶対値」と「不等式」が上げられていた。医学部専用問題がアラカルトになったことについては、今後は分からないが、難易度が落ちたわけではないとのことである。では、どこでどのような間違いが生じてくるのか、本校生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

2 出題の傾向

(1) 出題傾向

今年度は教育学部、農学部に加えて、工学部環境建設工学科社会デザインコースにおいて記述4題を100分で、理学部、工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）、医学部医学科においては記述5題を120分で、工学部後期は記述5題を120分で解答する。

(2) 出題内容

教育学部、農学部、工学部環境建設工学科社会デザインコース

- 1 小問集合
- 2 数列
- 3 領域、積分法
- 4 ベクトル

理学部、工学部

- 4 ベクトル
- 5 小問集合
- 6 数列
- 7 行列
- 8 微分法、積分法

医学部医学科

- 4 ベクトル
- 6 行列
- 7 確率
- 8 微分法、積分法
- 9 小問集合

工学部後期

- 1 小問集合
- 2 小問集合
- 3 確率、数列
- 4 行列
- 5 微分法、積分法

(3) 難易度

昨年度に比べ計算量が増えたことで難易度が上がったように感じた生徒が多かったようである。難易度としては基本～標準レベルの問題を中心に出题されている。小問については例年通り教科書レベルの基本問題であるが、簡単ではあるが証明問題も含まれており、得点しにくい問題もあったようである。合否の差は3～5点ぐらいであるとの話もあったため、基本問題に関しては確実に得点しておきたい。工学部後期については、昨年までのような穴埋め式の問題は削除されている。この点から数学の基礎学力と論理的思考力がしっかり身に付いているかを問われる問題になっていると考えられ、工学部後期については若干難化していると考えられる。

3 問題分析

本校の3年生に入試問題を解いてもらう。

3年生の文型生徒に1～4、理型生徒に4～9、理数科の生徒に工学部後期1～5を解いてもらった。採点基準は公表されていないため、定期考査に準じて採点し、得点率と誤答例から分析を行った。

<前期>

① 次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。
- (2) 方程式 $4x^2-3x+k=0$ の2つの解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ で与えられるとき、定数 k の値を求めよ。
- (3) 関数 $y=4^x-2^{x+2}+1$ の $-1\leq x\leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。
- (4) 直方体の各面にさいころのように1から6までの目が書かれている。この直方体を投げて、1、6の目が出る確率はともに p であり、2、3、4、5の目が出る確率はいずれも q である。この直方体を1回投げて、出た目の数を得点とする。このとき、得点の期待値は p , q によらずに一定であることを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	65.2	73.3	72.6	29.8	59.0
標準偏差	2.4	2.4	2.3	2.6	5.2

【誤答例】

- (1) $(2+\sqrt{3})^2$ の計算が間違っている。
 $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ としている。
- (2) $x=\sin\theta$, $\cos\theta$ を代入して止まっている。
 $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の展開が間違っている。

- (3) 2^{x+2} の処理ができていない。
 $t=2^x$ と置換しているが、 t の範囲が求められていない。
- (4) 期待値は計算できているが、条件 $2p+4q=1$ を作れていない。
 さいころという言葉から、 $p=q=\frac{1}{6}$ として考えている。

② 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が条件

$$S_n = 4n - 3a_n$$

を満たすとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 初項 a_1 を求めよ。
 (2) 一般項 a_n を求めよ。
 (3) $a_n > \frac{35}{9}$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし、
 必要ならば $\log_{10}2 = 0.301$, $\log_{10}3 = 0.477$ として計算してよい。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	94.2	54.1	20.5	50.0
標準偏差	1.1	4.4	3.2	7.4

【誤答例】

- (2) 漸化式が作れていない。
 漸化式を作って、一般項を求めている。
 (3) (2)が解けていない。
 対数の公式がきちんと理解できていない。
 常用対数はとれているが、計算が間違っている。

③ 次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と直線 $y = 2x + 4$ の交点の座標を求めよ。
 (2) 次の連立不等式で表される領域を D とする。領域 D を図示し、その面積を求めよ。

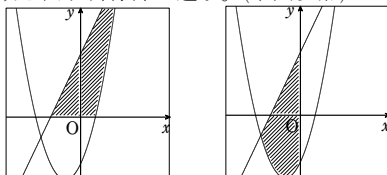
$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2x - 3 \\ y \leq 2x + 4 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

- (3) 点 (x, y) が(2)の領域 D を動くとき、 $x+2y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	96.0	55.6	37.6	56.4
標準偏差	0.8	3.6	2.9	5.1

【誤答例】

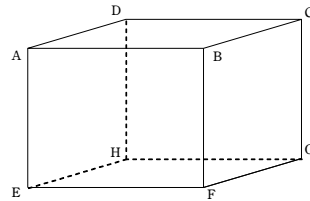
- (2) 領域を表す斜線部が違う。(下図参照)



境界を含むかどうかの記述がない。
 定積分の計算が間違っている。

- (3) 2次方程式 $x^2 + 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k$ の判別式の計算が間違っている。
 $x+2y=k$ とおいているが、領域内のどの点を通るときに k が最大か最小かが分かっていない。

- ④ 図のような1辺の長さを1とする立方体 $ABCD-EFGH$ を考える。線分 AH と線分 ED の交点を K とする。さらに辺 CG を3:1に内分する点を L とし、辺 EF を $p:1-p$ に内分する点を M とする。ただし、 $0 < p < 1$ である。
 また、 $\vec{a} = \vec{EF}$, $\vec{b} = \vec{EH}$, $\vec{c} = \vec{EA}$ とおく。



- (1) \vec{KL} および \vec{KM} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
 (2) \vec{KL} , \vec{KM} が垂直になるような p の値を求めよ。
 (3) 直線 KL と面 $EFGH$ を含む平面との交点を Q とする。
 (i) 線分 EQ の長さを求めよ。
 (ii) $\triangle EKQ$ の面積を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3 i)	(3 ii)	合計
文型得点率	79.4	63.7	24.1	3.7	44.2
文型標準偏差	2.3	2.2	2.1	0.8	5.7
理型得点率	89.0	76.2	48.6	21.0	58.7
理型標準偏差	1.2	1.6	2.2	2.0	5.0

【誤答例】

- (1) <文型>
 計算が間違っている。 (\vec{KL}) の間違ひの方が多かった。) 始点が E であることに抵抗がある。
 <理型>
 計算が間違っている。 (\vec{KM}) の間違ひの方が多かった。)
- (2) <文型>
 (1)が間違っている。
 計算が間違っている。
 <理型>
 (1)が間違っている。
 $\cos \angle LKM$ を求めようとしている。
- (3 i) <文型>
 EK の長さを求めて止まっている。
 \vec{EQ} が \vec{a} , \vec{b} のみで表されるベクトルであることに気付いていない。
 <理型>
 (2)の条件を利用している。(問題としては別であることが分かっていない)
 \vec{EQ} が \vec{a} , \vec{b} のみで表されるベクトルであることに気付いていない。
 点 Q が平面 $EFGH$ 上にある条件が $\vec{EQ} = t\vec{a} + s\vec{b}$ において、 $s+t=1$ だと勘違いしている。

(3 ii) <文型>

$\angle KEQ = 90^\circ$ として面積を求めている。

$\vec{EQ} \cdot \vec{EK}$ が間違っている。

<理型>

$\triangle EKQ$ が二等辺三角形になっていると勘違いしている。

⑤ 次の問いに答えよ。(医学部希望者は除く)

(1) a, b を実数で、 $a \neq 0$ とする。 $c = \frac{2+3ai}{a-bi}$ が純虚数のとき、 b と c の値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{2\pi} \left| x \cos \frac{x}{3} \right| dx$ を求めよ。

(3) 直方体の各面にさいころのように1から6までの目がかかれている。この直方体を投げて、1, 6の目が出る確率はともに p であり、2, 3, 4, 5の目が出る確率はいずれも q である。この直方体を1回投げて、出た目の数を得点とする。このとき、得点の期待値は p, q によらずに一定であることを示せ。

(4) 座標平面上の曲線

$$x = 2\cos\theta + 1, \quad y = 3\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で囲まれた図形を

x 軸周りに1回転して得られる回転体の体積を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	21.4	36.7	65.7	11.0	33.7
標準偏差	2.0	1.9	2.1	1.1	4.8

【誤答例】

- $a - bi$ を両辺に掛けて c を実数として係数の比較をしている。
純虚数の意味がわかっていない。
- x の値による場合分けができていない。
場合分けはできているが、定積分を間違えている。
- 期待値は計算できているが、条件 $2p + 4q = 1$ を作れていない。
 p, q が確率であることが理解できていない。
- 媒介変数表示された関数の定積分を間違えている。
楕円の方程式を求める際に計算を間違えている。

⑥ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = [\sqrt{n-1}] \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す。自然数 n に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k \text{ とおく。}$$

- a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ。
- $a_n = 5$ となる n はいくつあるか。
- S_n を求めよ。
- 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$ を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	90.0	79.5	19.4	14.9	51.2
標準偏差	1.2	1.9	2.2	15.0	5.0

【誤答例】

- $[x]$ の意味が読み取れていない。
- $26 \leq x < 37$ はできているが、個数を数え間違えている。
 $26 < x \leq 37$ となっている。
- 群数列であることは分かっているが、和が計算できていない。
- (3)が間違っている。

⑦ 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、

$$X = -\frac{1}{5}(A - 2E), \quad Y = \frac{1}{5}(A + 3E)$$

とおく。ただし、 E は2次の単位行列とする。

- XY, YX, X^2, Y^2 を計算せよ。
- $A = aX + bY$ を満たす実数 a, b を求めよ。
- 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	76.2	53.6	13.3	53.7
標準偏差	3.0	2.8	1.7	5.8

【誤答例】

- それぞれの計算が間違っている。
 X, Y を最初に求めているが、その計算が間違っている。
- 計算の過程で $\frac{1}{5}$ が抜けている。
 $\left(1 + \frac{1}{5}a - \frac{1}{5}b\right)A = \left(\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b\right)E$ として止まっている。
- $X^n = X, Y^n = Y$ に気付いていない。
実際に A を何乗かして法則を見つけようとしているが、見つからない。
(2)が間違っている。

⑧ 実数 a は $a > e$ を満たすとし、曲線 $y = \log x$ の点 $A(a, \log a)$ における接線を l とする。

- l と y 軸との交点を B とし、 l と x 軸との交点を C とする。 B と C の座標を求めよ。
- l と x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積を $S_1(a)$ とし、曲線 $y = \log x$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を $S_2(a)$ とする。 $S_1(a)$ と $S_2(a)$ を求めよ。
- $T(a) = S_2(a) - S_1(a)$ とおく。 $e^2 \leq a \leq e^3$ における $T(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	86.7	42.5	9.0	38.5
標準偏差	1.6	2.3	2.4	4.9

【誤答例】

- 微分はできているが、直線の方程式が間違っている。

(2) $\int \log x dx = \frac{1}{x} + C$ という間違いをしている。

$a - a \log a$ が負になることがわからず、

$S_1(a) = -\frac{a}{2}(1 - \log a)^2$ となっている。

(3) (2) が間違っている。

$T(a) = S_1(a) - S_2(a)$ として計算している。

9 (医学部希望者専用問題)

次の問いに答えよ。

(1) 33^{20} を 90 で割ったときの余りを求めよ。

(2) 正六角形 ABCDEF において、辺 CD の中点を P とする。

また、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ 、 $\overrightarrow{AE} = \vec{e}$ とおく。

このとき、 \overrightarrow{FP} を \vec{c} 、 \vec{e} を用いて表せ。

(3) 袋の中に 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 個の玉が入っている。この袋から同時に 3 個の玉を取り出す。このとき、取り出された玉の 3 つの数を 3 辺とする三角形が存在する確率を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	7.5	10.9	6.1	8.2
標準偏差	2.5	3.5	2.9	7.3

【誤答例】

(1) $33^{20} = 99^{10}$ より 9 で割り切れることから、10 で割った余りを答えとしている。

(2) \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AF} を利用すれば簡単であることに気付いていない。

(3) $a + b < c$ の確率を求めている。

$a + b > c$ となればよいことは分かっているが、場合の数を書き出す際に間違っている。

<工学部後期>

1 次の問いに答えよ。

(1) $z^3 = i$ となる複素数 z をすべて求めよ。

ただし、 i は虚数単位を表す。

(2) $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ である 2 つのベクトル \vec{a} 、 \vec{b} について、 $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} + \vec{b}$ が垂直であるとす。

\vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(3) 実数 x 、 y が条件

$$0 < y < \frac{1}{2}, \int_0^y \left(\frac{1}{1+2t} + \frac{1}{1-2t} \right) dt = x$$

を満たすとき、 y を x を用いて表せ。

(4) 点 (1, 1) を通り、曲線 $y = x^3 - 4x + 5$ に接する直線の方程式を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	34.7	72.0	48.7	46.0	50.3
標準偏差	2.1	1.9	2.2	2.0	6.1

【誤答例】

(1) 解が $z = i$ のみである。

$z^3 + i^3 = (z+i)(z^2 - iz + i^2)$ として、

2 次方程式 $z^2 - iz + i^2 = 0$ に解の公式を利用している。

(解の公式は実数係数でのみ定義しているため。)

(2) 計算を間違っている。

(3) 定積分が間違っている。

$x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+2y}{1-2y} \right|$ はできているが、 y を x で表せていない。

(4) 点 (1, 1) が曲線上の点であると勘違いしている。

2 次の問いに答えよ。

(1) (i)

定積分 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt$ 、 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt$ 、 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt$ を求めよ。

(ii) x 、 y を実数とし、関数 $f(t) = x \sin t + y \cos t$ に対して、不等式 $\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ が成り立つような点 (x, y) の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) (i) 関数 $f(x) = \frac{1}{x} \log(1+x)$ を微分せよ。

(ii) $0 < x < y$ のとき、 $\frac{1}{x} \log(1+x) > \frac{1}{y} \log(1+y)$ が成り立つことを示せ。

(iii) $\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{10}}$ 、 $\left(\frac{1}{13}\right)^{\frac{1}{12}}$ 、 $\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{14}}$ を大きい方から順に並べよ。

問題番号	(1 i)	(1 ii)	(2 i)	(2 ii)	(2 iii)	合計
得点率	63.3	22.7	70.0	18.3	35.8	34.8
標準偏差	1.2	1.8	0.9	2.2	1.8	6.0

【誤答例】

(1 i) 偶関数の性質を利用する際、2 倍することを忘れていない。

$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ 、 $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ が利用できていない。

(1 ii) 左辺、右辺それぞれの定積分が間違っている。

円 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ の中心が間違っている。

$y^2 - |y|$ の絶対値がうまく処理できていない。

(2 i) 微分が間違っている。

(2 ii) 証明の方針が立っていない。

(2 iii) 対数をとって止まっている。不等号が逆になっている。

3 $0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ とする。点 P は以下の (I)、(II) に従って、1 秒ごとに 2 点 A、B のいずれかに位置を決定する。

(I) P が A にいるとき、確率 p で B に移動し、確率 $1-p$ で A に留まる。

(II) PがBにいるとき、確率 q でAに移動し、確率 $1-q$ でBに留まる。

Pの最初の位置をAとし、Pが n 秒後にAにいる確率を a_n 、Bにいる確率を b_n とする。

ただし、 n は自然数とする。

- (1) a_1, a_2, b_1, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	77.5	35.6	10.6	44.8
標準偏差	2.5	2.8	1.5	5.3

【誤答例】

- (1) 文章を正確に理解できていない。
(開始点がAかBかがわかってない)
- (2) n 秒後の点の位置で場合分けしているが、和の法則が利用できていない。
- (3) $a_n + b_n = 1$ は求められているが、その利用方法がわかっていない。

$a_1 - \frac{q}{p+q}$ が求められていない。

④ 行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$T(X) = a + d, D(X) = ad - bc$ と定義する。

2次の正方行列 A は $T(A) = 4, D(A) = 5$ を満たすとする。

また t を実数とし、 E を2次の単位行列とする。

- (1) $T(tA + E), D(tA + E)$ を t を用いて表せ。
- (2) すべての t に対して、 $tA + E$ は逆行列を持つことを示せ。
- (3) $(tA + E)^{-1} = pA + qE$ を満たす実数 p, q を t を用いて表せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	60.0	41.7	24.0	38.3
標準偏差	2.8	1.9	3.8	7.4

【誤答例】

- (1) $T(X), D(X)$ の定義が理解できていない。
- (2) 証明の方針が立っていない。
 $D(X) \neq 0$ を示せばよいことはわかっているが、2次式 $5t^2 + 4t + 1$ の変形がわからない。
- (3) $(tA + E)^{-1}$ と $pA + qE$ をそれぞれ計算して、成分を比較しているが、計算できない。
 $xA = yE$ の形にしているが $x=0$ の場合と $x \neq 0$ の場合に分けられていない。

⑤ 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = 15x^2 + 10x + 1 + \frac{1}{x} + \log x$ とし、

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 10, a_n = a_{n-1} + \int_{n-1}^n f(x) dx \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$

(1) 定積分 $\int_1^n \left(\frac{1}{x} + \log x\right) dx$ を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ とおく。このとき、

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{b_n} - \sqrt{b_{n+1}})$ を求めよ。

ただし、必要ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log n = 0$ を用いてよい。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	61.7	20.8	4.4	28.2
標準偏差	2.4	2.3	1.1	4.4

【誤答例】

- (1) $\int \log x dx = \frac{1}{x} + C$ となっている。
- (2) $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx$ とはできなかった。
 $\int_{n-1}^n f(x) dx$ を計算して間違えている。
階差数列に気付いていない。
- (3) (2)で a_n が間違っている。
分子の有理化ができていない。

4 おわりに

今年度の問題について、計算量が増えたことが本校の生徒たちにとって負担に感じた点である。内容としては基本～標準レベルの問題がそろっており、受験生の基礎力と論理的思考力が問われるものがほとんどであった。また、今年度の問題を見ると、ただ公式を利用する能力よりは少し考えて答えを出すことを求められているように感じた。説明会のときに内藤教授が「現在の学生は問題を見たらすぐに手を動かしたがる。センター試験の弊害。2次試験ではじっくり考えて解く問題を用意しています。」と話されていた。10～20分考えて、10分で解答を作るのが理想であるとのことであった。

今年度の文理共通問題については、すべて理型の方が良くできていた。共通の問題が確率の証明問題と空間ベクトルということもあり、文型の生徒がともに苦手とする分野であったということが影響しているようである。

工学部後期の①(1)については、正解している生徒のほとんどが複素数平面で学ぶド・モアブルの定理を利用していた。実際、説明会でもこちらの解答も紹介されていた。新課程(現1年生)においては複素数平面を学ぶこととなるため、学んだときに解かせてみたい問題である。

説明会の最初に昨年度の理学部数学科のAO入試の問題の紹介があった。「点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d が

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ となることを証明せよ。」というものであ

る。内藤教授からは公式を理解して、作りだすことができるというように、「数学を数学として理解しているかどうかを見る」ということであった。数学を公式暗記、公式利用だけの教科にしないことが重要であると感じさせられた。

最後に余談であるが、最近の生徒は受験番号の書き間違いが多いとのことであった。必ず受験票を見て、正確に記入してほしいとのことであった。