数学Ｂにおける課題学習の授業実践

愛媛県立川之江高等学校　　岡本　拓也

１　はじめに

本校は普通科５クラスで編成されており、生徒の進路希望に応じて、２年次より、類型別のクラス編成を行っている。

私は今年度、２年生Ｉ類型（主に国公立文系大学への進学を希望するクラス）を担当しており、数学Ⅱ・数学Ｂにおける教科指導を行っている。本校の生徒は比較的落ち着いて授業に臨める生徒が多く、真面目に授業を受けることができている。しかし、数学に対して苦手意識が強い生徒も多く、積極的に問題に取り組んだり、議論をしたりすることが少ない。グループワークでも、他の生徒にすぐに解答を教えてもらう生徒が多く、思考を深める授業に至らないことが多い。そこで、生徒に興味・関心を持たせ、数学的なものの見方や考え方を高めることを目的として、「ハノイの塔」を取り上げた。また、授業後の生徒の感想の中に、「塔がもっとあれば簡単だったのに。」という記述を見つけた。そこで、塔を１本増やし、４本のハノイの塔で規則性を見つける課題学習を行うこととした。

２　実践計画

⑴　実践時期

数学Ｂ「数列」の終わりの授業

⑵　ハノイの塔について

ハノイの塔は数学者エドゥアール・リュカが考案したパズルゲームであるが、数学者リュカによる創造上のストーリーがあり、生徒の関心を惹くため問題として掲示した。

$\boxed{\text{問題}}$　インドのガンジス川のほとりに，世界の中心を表すという巨大な寺院があるという。そこには青銅の板の上に，３本のダイヤモンドの柱が立てられている。そのうちの１本には，天地創造のときに，神が64枚の純金の円盤を大きい順番から順に重ねておいた。これが「ハノイの塔」である。司祭たちはそこで，昼夜を通して，次の$\boxed{\text{ルール}}$に従って，円盤を別の柱に移し替えている。そして，すべての円盤の移し替えが終わったとき，世界は終焉を迎えるという。

$\boxed{\text{ルール}}$

○　最初，n 枚の円盤が，左端の柱に小さい円盤が上になるように順に積み重ねられている。
○　円盤は，１回に１枚ずつ，どれかの柱に移動させることができる。
●　小さな円盤の上に大きな円盤をのせることはできない。
○　n 枚のすべての円盤を右端（もしくは中央）の柱に移動させることができれば，終了。

３　授業実践

⑴　３本のハノイの塔

７班に分かれてそれぞれハノイの塔を用意し、実際に手を動かしながら、円盤の枚数に応じた最小移動回数を数えさせた。最初は、最小移動回数かどうかの確かめを行っていないため、班ごとの回数を持ち寄り、その中の最小値を仮の回数として設定した。班ごとに差はあったが、円盤が５枚辺りから規則性を見つけ、計算をしてから試行する班が見受けられた。またある班では、円盤の動かし方について、最下段の円盤を動かすには上部すべてを別の塔に移す必要があることを発見し、上部を動かした後の状態からスタートする手法をとっており、漸化式の本質を捉えた手法に驚かされた。具体的な規則性を尋ねたところ、階差数列として考えている班や漸化式として考えている班があったため、クラス全体に班で見つけた規則性を発表させ、情報共有を行った。以下は、生徒が見つけた、または予想した規則性である。

・2^nずつ増えている。
・前の最小回数の２倍に１を足したものである。
・移動する際、同じ色の円盤が重ならない。（使用したハノイの塔は偶数番目と奇数番目で色が異なる）

その後、円盤が n 枚のときの最小移動回数a_nを考えさせた。多くの生徒は階差数列として$a_n = 2^n - 1$ を求めていた。ある生徒に、なぜ漸化式を使わなかったのか聞いたところ「どうやって作ればいいか分からなかった。」と回答があった。これまで、漸化式を立てる経験がなかったため、立式が出来なかったようである。

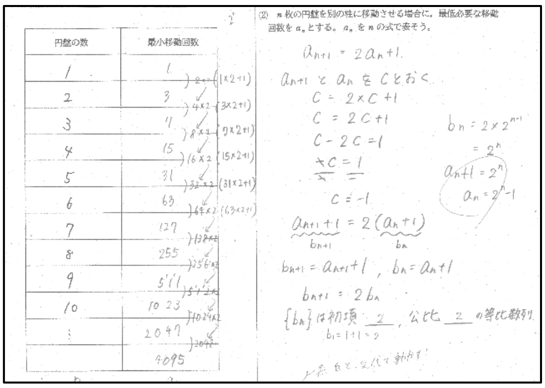
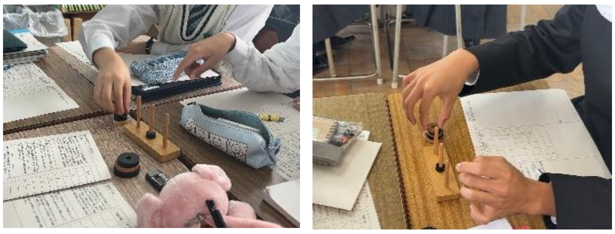


図１　生徒のワークシート⑴

(2)　４本のハノイの塔

前述したとおり、前回の授業の感想欄において、塔を増やせば簡単に動かせるのではないかという疑問があった。生徒の思考力を養うために塔を４本に増やし、最小移動回数の規則性を考える課題学習を行った。なお、課題学習で使用したハノイの塔は３本だったため４本目は仮想で行うように指示した。

前時と同様に７班に分かれて試行を行った。まず時間がかかったのは、最小回数の検出である。試行を何度も行い、最小回数を見つけるのに苦労していた。３本の時と違い、円盤の分け方が数通りあったためであると推測する。円盤の分け方を変えるように誘導すると、うまくできているようであった。



４本のハノイの塔に取り組んでいる様子

３本の時と同様に、階差による規則性を見出している班がいた。図２は生徒が見つけた規則性である。隣接２項間の差が

2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, ・・・

となることを見つけていた。この規則性の検証はできなかったが、階差が群数列となることに着目して、数列を考えようとする様子が伺えた。

円盤の数	最小移動回数（柱３本）	最小移動回数（柱４本）
1	1 $\xrightarrow{0}$	1
2	3 $\xrightarrow{0}$	$\downarrow{+2}$ 3
3	7 $\xrightarrow{-2}$	$\downarrow{+2}$ 5
4	15 $\xrightarrow{-6}$	$\downarrow{+4}$ 9
5	31 $\xrightarrow{-18}$	$\downarrow{+4}$ 13
6	63 $\xrightarrow{-46}$	$\downarrow{+4}$ 17
7	127 $\xrightarrow{-102}$	$\downarrow{+8}$ 25
8	255 $\xrightarrow{-223}$	$\downarrow{+8}$ 32
9	511 $\xrightarrow{-468}$	$\downarrow$ 43
10		$\downarrow$
11		$\downarrow$ 65

図２　生徒のワークシート(2)

４　実践の成果と課題

今回の実践では、身近なゲームの内容であり、生徒も意欲的に取り組めていた。数学的な思考を養う上で、実際に動かしながら考えることの重要性を改めて気付かされた。塔を増やす発想には驚かされたが、思考が深まった結果であると推測する。生徒からは次のような感想が出た。

・ハノイの塔の原理や規則性に気付くことができた。友達が階差数列で式を求め始めたときは驚いた。
・漸化式の仕組みを具体的に体験することができて分かりやすかった。
・４本のほうが簡単だと思っていたけど実際やってみると複雑で驚いた。

生徒から「２進数とのつながりがあるのでは」「プログラミングすると楽にできそう」など、教科を超えた意見もあり、思考の広がりを実感することが出来た。

今回の課題学習では、４本の時の移動の仕組みについては理解している生徒が見受けられたが、規則性を検証することが出来なかったことが心残りである。今後の課題として、仕組みと規則性の関係性を検証させていきたい。今後も実体験を伴う活動を通して、日常の中にある数学的なものの見方や考え方を、様々な単元で実施していきたい。

＜引用・参考文献＞

・「ハノイの塔 64 枚で世界滅亡？漸化式&最短手数・歴史を解説！発明・発見年表」（hatsumeihakken.com））