

# 中四国の国公立大学入試問題の研究

—AO・推薦入試の問題から—

愛媛県立宇和島東高等学校 大塚 隆三

## 1 はじめに

2000年度、東北大、筑波大、九州大の3校で始まった国立大のAO入試は今年で10年余りが経過し、年々成熟と進化を図ろうとしている。

今年度入試での形態別の学校数では、国立大学82校中、AO入試実施校が47校、推薦入試実施校が76校、公立大学81校中、AO入試実施校が21校、推薦入試実施校が79校にのぼる。入学者比率を見てみると、国立大の全入学者約10万人のうち、推薦+AO入学者は約15%の約1万5千人、公立大学約2万9千人のうち、推薦+AO入学者は約25%の7千5百人を占めている。AO入試に関しては、国公立大学の総定員約3千人に対して、志願者数は約1万1千人を超えている。

AO入試に関しては、推薦・一般入試にはなかった新しい人材発掘の理念と戦略を備えている。その傾向は、名古屋工大の「工学創成プログラム」、島根大総合理工の「理工特別コース」、愛媛大の「スーパーサイエンス特別コース」、九州大の「21世紀プログラム」など、AO入試に特別なプログラムが組み込まれていることでも明らかである。推薦入試では、医療・教育分野などで「地元枠」あるいは「地域優遇型」の推薦入試が増加している。2004年度の独立法人化以降、教育分野では、いわゆる団塊世代の大量退職に伴い、特に過疎地、へき地の教員を志す者の不足、地域医療では、医師不足などの地域の問題に対して、各地域との連携を強化している。今後も、医療・教育分野を中心に増加する傾向にあると思われる。

近年のAO入試の拡大に伴って、その理念が推薦入試にも大きな影響を及ぼし、実施要項の改訂以前からアドミッションポリシーや「求める人物像」を明記する傾向が定着している。また、文部科学省は2011年度の通達で、AO入試に限らず全入試において「合格から入学までの学習喚起」を講ずるよう、初めて全大学に求めた。今後はいっそう入学準備教育の充実が進むと期待される。特に、入学準備教育はAO全体のプロセスを形成する一環であるため、大学の教育プログラムへの熱意・向上心に欠ける受験生は、最悪の場合、合格を取り消すと要項に明記している大学もあることを忘れてはならない。出題問題の中から、昨年度の中四国の国公立大学のAO・推薦入試で実際に出題された数学の問題を取り上げてみる。

## 2 平成24年度推薦入試問題から(抜粋)

以下に推薦入試における教科面接の質問内容を紹介する。

・ $y = x^2 + 2x$  のグラフをかけ。

・ $y = x^2 + 2x$  と  $y = -x$  との交点の座標を求めよ。

(愛媛大 工 環境建設工 推薦)

・等比数列の一般項と和の公式を言え。また、和の公式の証明をせよ。

・ $\sin x$  を定義にしたがって微分せよ。

・ $\{f(x) \cdot g(x)\}$  を定義に従って微分せよ。

・ $\int_0^1 xe^{2x} dx$  を計算せよ。

・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  を解け。

(山口大 理 数理科学科 推薦)

・ $\log_x 100 - \log_{10} x - 1 = 0$  を解け。

・ $\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-x} dx$  について

①  $\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x}$  を満たす  $a, b$  を求めよ。

②  $\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-x} dx$  を計算せよ。

(岡山大 工 機械システム工 推薦)

・「生徒全員がペンを持っている」の否定を言え。

・「 $\sin \theta = \frac{1}{2}$  ならば  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 」の真偽を答えよ。

・「 $|x-1| < 2$  ならば  $|x| < 3$ 」の真偽を答えよ。

・ $\int \log x dx$  を計算せよ。

・ $(0, 0)$  を通り、 $y = \log x$  に接する接線の方程式を求めよ。

・求めた接線と  $y = \log x$ 、 $x$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

・ $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ 、 $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$  とする。

①  $A \cap B$  を求めよ。 ②  $n(A \cap B)$  を求めよ。

・ $n(A) = 5$ 、 $n(B) = 6$ 、 $n(A \cap B) = 2$  である  $n(A \cap B)$  の具体例をあげよ。

・ $y = \frac{2}{x^2-1}$  ( $x \geq 0$ ) の増減表とグラフをかけ。

(島根大 総合理工 数理情報システム 推薦)

3 平成24年度AO・推薦入試問題から

広島大学 理学部 数学科 AO入試

第1問

関数  $f(x) = \log(x^{\log 2}) - (\log x)^2$  ( $x > 0$ ) を考える。

自然数  $n, k$  に対して,  $g_n(k) = \sum_{m=1}^k f\left(\frac{n+m}{n}\right)$  とおく。

以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x) \geq 0$  となる  $x$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  である  $n$  を固定するとき,  $g_n(k) \leq g_n(k+1)$  となる  $k$  の値をすべて求めよ。
- (3)  $n$  が固定され  $k$  が自然数全体を動くときの  $g_n(k)$  の最大値を  $G_n$  とする。極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$  を求めよ。

第2問

$a$  を正の実数,  $b, d$  を実数とする。O を原点とする座標

平面において, 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が表す1次変換により,

どのような0でない実数  $s$  に対しても点  $\left(s, \frac{1}{s}\right)$  は曲線  $x^2 - y^2 = -4$  上の点に移るとする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $b = -\frac{1}{a}$ ,  $d = \frac{1}{a}$  となることを示せ。
- (2) 実数  $t$  に対して点  $P(1, t)$  を考える。行列  $A$  を表す1次変換による  $P$  の像を  $Q$  とする。どのような実数  $t$  に対しても線分  $OP$  と  $OQ$  が直交しないための  $a$  の範囲を求めよ。
- (3) (2) の  $P$  と  $Q$  に対し, 半直線  $OP$  を原点  $O$  を中心に  $\theta$  だけ回転すると半直線  $OQ$  が得られるとする。 $a$  が(2)の条件を満たすとき,  $\tan \theta$  を  $t$  の式で表せ。
- (4) (3) において  $\theta$  が正の実数  $t$  によらない定数となるときの  $a$  の値を求めよ。

第3問

$n$  を3以上の整数とする。サイコロを  $n$  回投げるとき, 6がちょうど2回出てかつ  $n$  回目に5以下の目が出る確率を  $P_n$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $P_n$  を求めよ。
- (2)  $P_n = P_{n+1}$  となる  $n$  の値を求めよ。
- (3)  $P_n$  が最大となる  $n$  の値を求めよ。

第4問

$a$  と  $b$  は正の定数であり, 区間  $0 \leq x \leq 1$  で常に

$\frac{x^2}{2a} - x + 1 - b \geq 0$  を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 定数  $b$  の値の範囲を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 放物線  $y = \frac{x^2}{2a} - b$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $S$  と

する。 $S$  を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。

(3) (2) の  $S$  に対し,  $a \geq 1$  のとき  $S \leq \frac{2}{3}$  であることを示せ。

(4)  $a, b$  が与えられた条件を満たしながら動くとき, (2) の  $S$  の最大値とその最大値を与える  $a, b$  の値を求めよ。

第5問

座標平面上の3点  $A(0, 1)$ ,  $P(x, y)$ ,  $Q(0, z)$  を考える。ただし,  $0 < x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z < 1$  とする。また,  $\alpha = \angle PAQ$ ,  $\theta = \angle APQ$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 長さの比  $\frac{PQ}{AQ}$  を  $\alpha$  と  $\theta$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  が  $P(1, 0)$  で固定され, 点  $Q$  が  $0 \leq z < 1$  を満たしながら動くとき,  $\theta$  の動く範囲を求めよ。また, このときの  $\frac{PQ}{AQ}$  の最小値とその最小値を与える点  $Q$  の座標を求めよ。
- (3) 中心が  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  で半径が  $\frac{1}{2}$  の円の外側に点  $P$  が固定され点  $Q$  が  $0 \leq z < 1$  を満たしながら動くとき,  $\frac{PQ}{AQ}$  が最小値をとるのは点  $Q$  の座標が  $(0, 0)$  のときであることを示せ。

山口大学 理学部 数理科学科 推薦入試 (抜粋)

第1問

日本の代表的な年金制度に国民年金がある。国民年金は, 日本国内に住所のある20歳以上60歳未満の全ての人が加入することが義務付けられており, 毎年一定の額を保険料として年金機構に払い込まなくてはならない。平成23年度の保険料は年額180,240円となっており, 以後の保険料は変わらないとすると, 60歳になるまでの40年間に払い込む保険料の総額は次のようになる。

$$180,240 \times 40 = 7,209,600 \text{円}$$

60歳以降, こうして積み立てた保険料から年金が支給されるが, 実際には払い込んだお金の毎年利子が付くため, 支給される年金は払い込んだ保険料の総額より多くなる。以下で実際に年金の試算を行ってみよう。ただし, 話を簡単にするために次のことを仮定しておくことにする。

- ・1年ごとの利率 (年利) は  $p\%$  で固定されている。
- ・保険料の支払いと年給の受給は全て4月2日に行われる。
- ・利子は, 1年分が毎年3月31日に複利で加算される。

たとえば,

36歳になる年の4月2日に払い込んだ保険料180,240円は, 60歳になる年の4月1日には24年分の利子が複利で加算されるため, 実際には次の価値があるとみなされる。

$$180,240 \times \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{24} \text{円}$$

以下、 $r = 1 + \frac{p}{100}$  として、次の問いに答えなさい。ただし金額を数値で答える場合には、小数点以下を切り捨てて整数値で答えなさい。(計算には配布された電卓を用いてよい。べき乗の計算は次項の『電卓によるべき乗の計算』を参考にしなさい。)

- (1) 20歳になる年から59歳になる年までの40年間、毎年180,240円の保険料を払い込んだとする。60歳になる年の4月1日時点での払い込んだ金額の価値の合計を $X$ とするとき $X$ を $r$ を用いて表しなさい。
- (2)  $p = 5$  (年利5%)の場合に $X$ の値を実際に計算しなさい。
- (3) 20歳になる年から59歳になる年までの40年間、毎年 $x$ 円の保険料を払い込む。 $p = 5$ の場合に、60歳になる年の4月1日時点での払い込んだ金額の価値の合計を $f(x)$ と表すとき、 $f(x) = 20,000,000$ となるための $x$ の値を計算しなさい。

次に年金の受給額について考える。60歳になる年の4月1日の時点で、年金機構には(1)で求めた $X$ 円が預けられることになる。60歳以降は、この預けている金額から毎年一定額を引き出す、という扱いで年金受給額が計算される。以降は、60歳になる年から84歳になる年まで計25年間に、毎年同じ金額を年金として受給されるものとして計算を行う。毎年の年金受給額を $y$ 円とすると、 $y$ は次のように計算される。

$n$ を60以上85以下の整数とし、 $n$ 歳になる年の4月1日の時点で年金機構に預けている金額を $a_n$ で表すことにする。すると、 $a_{60} = X$ であり、 $n + 1$ 歳になる年の4月1日の時点で年金機構に預けている金額 $a_{n+1}$ は $a_n$ から $y$ を引いたものに利子がかかったものとなるので

$$a_{n+1} = r \times (a_n - y)$$

という関係式が得られる。このとき、 $a_{85} = 0$ となるような値 $y$ が毎年の年金受給額となる。

- (4)  $y$ を $X$ と $r$ を用いて書き表しなさい。また、 $p = 5$ のときに、(2)で求めた $X$ の値を用いて実際に $y$ の値を計算しなさい。

注意：上記の計算は「積み立て方式」と呼ばれる方式によるものですが、日本の国民年金の計算では賦課方式と呼ばれる方式が採用されており、実際には上記のような形で計算されるわけではありません。

## 愛媛大学 理学部 数学科 AO入試

次の□に入る数を解答用紙の指定のところに記入せよ。

- (1) 連立不等式

$$|x| + |y| \leq 3, |x| \leq 2, |y| \leq 2$$

の表す領域の面積は□アである。

- (2)  $a > 0$ とする。2つの曲線 $y = e^x$ および $y = \log x$ に対し $x = a$ におけるそれぞれの接線の傾きが等しいとき、

$$e^a \log a = \text{□イ}$$

- (3) 方程式 $x^4 - 2x^3 + ax + b = 0$ が $x = -1 + \sqrt{2}i$ を解にもつとき、 $a = \text{□ウ}$ 、 $b = \text{□エ}$ である。ただし、 $a, b$ は実数で、 $i$ は虚数単位である。

$$(4) \int_1^2 \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} dx = \text{□オ}$$

- (5) 関数 $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$  ( $0 < x < \pi$ )は $x = \text{□カ}$ のとき極小値□キをとる。

- (6)  $a_1 = \frac{3}{2}$ 、 $a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}$ で定められた数列 $\{a_n\}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{□ク}$ である。

- (7) A, B, Cの3人が、2人ずつ対戦するゲームをする。AがBに勝つ確率は $\frac{1}{3}$ 、BがCに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ 、CがAに勝つ確率は $\frac{1}{4}$ とし、引き分けはないものとする。それぞれが他の2人と1回ずつ対戦するとき、BとCがともに1勝1敗になる確率は□ケである。

- (8) 平面上の異なる3点A, B, Cについて、

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2} = \text{□コ}$$

### 第2問

次の命題の真偽を判定し、解答用紙に書かれた真または偽のいずれか一方に○を付けよ。さらに、真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ。

- (1) 2つの整数の平方の差は、4の倍数であるか奇数である。
- (2) 実数 $a, b, c$ が $a + b < b + c < 0 < a + c$ を満たすとき、 $a \geq 0$ である。
- (3) 2つの集合 $P, Q$ を

$$P = \left\{ \sin \frac{n\pi}{100} \mid n \text{は整数}, 0 \leq n \leq 50 \right\}$$

$$Q = \left\{ \cos \frac{n\pi}{100} \mid n \text{ は整数}, 0 \leq n \leq 50 \right\}$$

とする。このとき、 $P = Q$ である。

- (4)  $\triangle ABC$ で、 $\cos A = \cos B = \sin C$ を満たすものは存在しない。

### 第3問

$n$ を自然数とすると、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

### 第4問

実数を成分とする2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を

満たすとする。

- $b = c = 0$ である $A$ をすべて求めよ。
- $a = 0$ である $A$ をすべて求めよ。
- $abcd \neq 0$ である $A$ を1つ求めよ。

## 岡山大学 理学部 数学科 AO入試

### 第1問

数列 $\{F_n\}$  ( $n \geq 0$ )を次のように定義する。

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad (n \geq 1)$$

この数列について次の問いに答えよ。

- $n \geq 2$ に対して $F_n$ と $F_{n+1}$ は互いに素であることを示せ。
- $n \geq 1$ に対して
 
$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \cdots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$$
 であることを示せ。
- $n \geq 1$ に対して $F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^n = 0$ であることを示せ。

### 第2問

実数を成分とする $2 \times 2$ 行列 $A$ が $A \neq \pm I$ ,  $A^2 = I$ を満たしているとする。ただし、 $I$ は単位行列である。このとき次の問いに答えよ。

- 実数 $k \neq \pm 1$ に対して $B = I + kA$ とおく。このとき $B$ は逆行列をもち、 $B^{-1} = pI + qA$ となる形に表されることを示せ。また実数 $p, q$ を $k$ を用いて表せ。
- $A \neq \pm I$ ,  $A^2 = I$ であり、かつ $A + I$ ,  $A - I$ がともに逆行列をもたないような行列 $A$ の例を1つあげよ。

### 第3問

$x \geq 0$ で定義された関数 $f(x)$ が次を満たしているとする。

- $f(x)$ は単調増加、すなわち $x < y$ ならば $f(x) < f(y)$
  - すべての $x, y \geq 0$ に対して $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
- このとき次の問いに答えよ。

- 「1次関数」ではなく、かつ上記の条件(A), (イ)を満た

すような関数の例を1つあげよ。ただし、1次関数とは $f(x) = ax + b$  ( $a, b$ は定数)という形の関数のこととする。

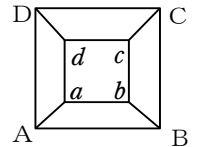
- すべての $x \geq 0$ に対して $f(x) \geq 0$ であることを示せ。
- ある定数 $a, b > 0$ が存在してすべての $x \geq 0$ に対して $f(x) \leq ax + b$ を満たすことを示せ。

### 第4問

8個の点 $A, B, C, D, a, b, c, d$ が図のように道でつながっている。物体が点 $A$ を出発し、1秒ごとに道でつながった隣り合う点に次のような確率で移動する：

- (ア) 物体が大文字の点にあるときは、隣の大文字に移る確率は $\frac{1}{4}$ 、隣の小文字の点に移る確率は $\frac{1}{2}$ である。

- (イ) 物体が小文字の点にあるときは、隣り合う3個の点に移る確率はいずれも $\frac{1}{3}$ である。



このとき次の問いに答えよ。

- 3秒後に物体が点 $B$ にある確率を求めよ。
- $n$ 秒後に物体が大文字の点にある確率を求めよ。
- 8秒後に物体が点 $a$ にある確率を求めよ。

## 4 まとめ

AO入試と推薦入試の問題の筆記試験・教科面接の問題の一部を紹介した。教科面接においては、問題の難易度は高くないものの、生徒自身の表現力が問われるのではないかとと思われる。入試に限らず、新教育課程における言語活動の充実を図るためにも、普段の授業の中から表現力を身に付けさせていきたい。

筆記試験においては、数学的な見方や考え方を問われる問題に加え、基礎・基本が問われる問題や、読解力を問われる問題が出題される傾向にある。問題文を読んで流れをしっかりとつかみ、正しい推論をしていく力やその考えを式や図で表現できる力を身に付けていくことが求められる。数学ⅡBまでの内容であるものについては、早い段階で生徒に解かせてみるのもよいのではないかと思う。

センター試験を使わないAO・推薦入試では、試験日が9月から1月にあるため、それまでに十分な学力を身に付けなければならない。当然、一般入試に向けた学習も平行して行わなければならないので、生徒の状況に応じて受験をさせるべきか判断していかなければならないと思う。

AO・推薦入試も頭に入れながら、国公立大学の受験を考えていくことが3年生の担任には求められていくが、安易に受験機会を増やす手段として考えていくことは危険であると思われる。