令和５年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立今治西高等学校　近本　優大

1　はじめに

今年度は５月13日（土）に愛媛大学理学部平野幹教授による令和５年度愛媛大学入試問題の説明会が行われた。解説の中での教授のコメントをまとめながら問題の分析を行った。

2　出題傾向

(1)　問題数および試験時間

前期日程は理系，文系ともに３題ずつの問題構成である。試験時間は教育学部，農学部，工学部（文理型入試）は100分，理学部，工学部（理型入試），医学部医学科は120分であった。後期試験についても３題出題されている。全てにおいて小問集合１題，記述式２題の構成になっている。基本的な問題を多く出題しており，教科書の基本事項を習得してほしいとのことであった。

(2)　出題内容

前期日程

番号	科　目	内　容
1	ⅠAⅡB	三角比，三角不等式，確率，ベクトル，対数関数
2	ⅠⅡB	微分法，数列，命題と証明
3	ⅡB	領域，格子点，積分法
4	AⅢ	積分法，確率
5	ⅠBⅢ	数列，命題と証明，複素数平面
6	ⅡⅢB	領域，格子点，積分法，ベクトル，三角関数

選択問題

教育学部（ⅠAⅡB受験者），農学部，工学部（文理型入試）

1 2 3

教育学部（ⅠAⅡBⅢ受験者），

2 3 4

理学部，工学部（理型入試），医学部医学科

4 5 6

後期日程（理学部，工学部）

番号	科　目	内　容
1	ABⅢ	微分法，積分法，数列，確率
2	BⅢ	ベクトル，複素数平面，微分法
3	ⅡⅢ	図形と方程式，微分法

(3)　出題者の意図

評価のポイント

1　基本的な事項が理解できているか

2　基本的な計算が身に付いているか

3　応用力を身に付けているか

4　論理的に考察し，論述できるか

の４つの観点を基準にまんべんなく評価をするということで問題が出題されている。問題数は多くないが，計算力を必要とする問題も多くあり，基本事項の定着とともに評価している。また，問題数を少なくすることで１問に対してじっくり考えてほしいという意図がある。その中で，文章読解力と論理的に考察し，記述する能力が問われている。別解が何種類もある問題も多く，受験生が様々な角度から考察できるようにしているとおっしゃっていた。１題あたり30分～40分が適切と考えられる。難問はない中で，数学Ⅲが必要な受験生については，特に演習をして基本事項を定着させておく必要がある。

3　問題分析

前期日程

1　以下の問いに答えよ。

(1)　A が鋭角で，$\cos A=\dfrac{1}{5}$ を満たすとき，$\sin A$ と $\tan A$ の値を求めよ。

(2)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin x+\cos 2x<0$ を解け。

(3)　A，Bの２つの袋があり，Aには赤玉が１個と青玉が３個，Bの袋には赤玉が２個と青玉が２個入っている。Aから同時に２個，Bから同時に２個の玉を取り出すとき，これら４個の玉のうち，赤玉が１個となる確率を求めよ。

(4)　△ABCの辺ABの中点をPとし，辺ACを２：１に内分する点をQとする。線分BQと線分CPの交点をRとするとき，

$$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s，t を求めよ。

(5)　$\log_3 5$，$\dfrac{3}{2}$，$\log_9 24$ を大きい順に並べよ。

【考察】

全ての問題が教科書の問や練習問題で扱われる難易度の問題であった。確実に得点できるように演習する必要がある。文型の生徒にとっても取り組みやすい内容であった。

(1)においては，三角比の値を用いて他の三角比を求める基本的な問題である。直角三角形の図を用いて求めてもよいので，必ずできるようにしてほしいとおっしゃっていた。

(2)は，三角関数を含む不等式の問題である。三角関数だけでなく２次不等式を苦手とする受験生が多くいるようだ。指数関数や対数関数についても置き換えなどによる範囲の置き換えに注意させたい。

(3)は，玉の色を考えて取り出す確率に関する問題である。順列と組合せの区別がついていない受験生が多く見られた。試行や事象の意味をしっかり理解させることが大切である。

(4)については，ベクトルの一般的な１次独立の問題である。

交点の比を設定し，同じベクトルを 2 種類で表すことを意識させたい。メネラウスの定理を用いた別解も紹介されていた。

(5) は対数を含んだ数の大小関係を考える問題である。そもそもの対数の理解が悪く，対数の問題は正答率が低い。底を統一して大小を比べることを理解させたい。対数の定義についても今一度確認し，理解を深めておく必要がある。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) x, y を正の実数とする。円柱の底面の周の長さが x, 高さが y であり，$2x+y=6\pi$ を満たすとする。このとき，円柱の体積 V を x を用いて表せ。また，V の最大値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$, $a_{n+1}={a_n}^2+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする。m を自然数とするとき，a_{2m} は 6 の倍数であることを示せ。

(3) 正の実数 a に関する次の命題の真偽を答えよ。また，真であるときは証明を与え，偽であるときは反例をあげよ。ただし，$\sqrt{2}$ は無理数であることを用いてよい。

(i) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である。

(ii) a が自然数ならば $\sqrt{a}+\sqrt{2}$ は無理数である。

【考察】

(1) は x, y が満たす関係式から円柱の体積 V を x の 3 次関数で表すことで最大値を求める問題である。要点整理から立式ができれば容易に完答することができる。基本の定着に努めたい。(2), (3) は証明の論述問題である。(2) が数学的帰納法を用いたもので，(3) が背理法を用いたものである。受験生によくあるのが「形式的な解答」や「結果に合わせるような解答」に終始しているものが多いという指摘があった。数学的帰納法では，$n=k$ のときに成り立つと仮定したときに，$n=k+1$ のときに成り立つことを意識させる。背理法では何が何に矛盾したのか明確にしてほしいとの説明があった。形式的な証明でなく生徒がまず自分が納得のいく論述ができるような指導が必要である。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq x(2n-x) \end{cases}$$

の表す領域を D_n とし，D_n に属する格子点の個数を a_n とする。ただし，座標平面上の点 (x, y) において，x, y がともに整数であるとき，点 (x, y) を格子点という。

(i) D_2 を図示せよ。

(ii) a_2 を求めよ。

(iii) k を $0 \leqq k \leqq 2\pi$ を満たす整数とする。D_n と直線 $x=k$ の共通部分に属する格子点の個数を k, n を用いて表せ。

(iv) a_n を求めよ。

(2) 曲線 $y=2x^2-4x+6$ を C とする。また，p を正の実数とし，点 $\mathrm{P}(p, p^2)$ を考える。

(i) $2p^2-4p+6>p^2$ を示せ。

(ii) 点 P から曲線 C に引いた 2 つの接線のうち，一方の接線の傾きが 0 であるとする。このとき，p の値を求めよ。さらに，2 つの接線についてそれぞれの方程式を求めよ。

(iii) 曲線 C と (ii) で求めた 2 つの接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。

【考察】

(1) は不等式が表す領域から格子点の個数を数える問題である。領域の図示に関しては，苦手な生徒が多いと感じている様子であった。格子点の問題については，具体的な n の値の場合を考察し，一般化していくことで立式できる要素が増えていくだろう。直線 $x=k$ を用いるのか直線 $y=k$ を用いるのかを考えさせ，直線上の格子点の個数の和を考えるとよい。$k=0$ の扱いや対称性を利用して数えた場合には，抜けもれや重複に十分注意する必要がある。(2) (i) の不等式 $2p^2-4p+6>p^2$ の証明は，左辺に移行して平方完成を行うという基本的な問題であるが，式の意味がわからず無答になってしまう受験生が少なくないようだ。(ii) については，接線の傾きが 0 のときに，接線は放物線の頂点と接するということを用いて p の値を求めていくが，接線の傾きが 0 のとき，接線は放物線の頂点と接するということは，証明をしなくとも用いてよいのかというところまで，考えが至ることが望ましいという話があった。当たり前に感じる事柄でも証明の必要性があるものがあることを指導しておきたい。

$\boxed{4}$ 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) a, b を実数とする。関数 $f(x)=\dfrac{x+10}{x^2+7x+14}$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0, f(0))$ における接線の方程式が $y=ax+b$ であるとき，$a=\boxed{ア}$, $b=\boxed{イ}$ である。

(2) 関数 $f(x)=-x-1+\sqrt{4x+1}$ $(x \geqq 0)$ について，$f(x) \geqq 0$ であるための必要十分条件は $0 \leqq x \leqq \boxed{ウ}$ であり，また，$f(x)$ の最大値は $\boxed{エ}$ である。

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x+\tan x)dx=\boxed{オ}$ であり，

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |x+\tan x|dx=\boxed{カ}$ である 。

(4) 関数 $f(x)=x$, $g(x)=2x\sin x$ について，$f'(0)=1$ であり，$g'(0)=\boxed{キ}$ である。また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において，直線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ とで囲まれた図形の面積は $\boxed{ク}$ である。

(5) 正六角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4P_5P_6}$ が与えられている。1 個のさいころを 3 回続けて投げて，出た目を順に a, b, c とする。このとき，3 点 P_a, P_b, P_c が三角形を作る確率は $\boxed{ケ}$ であり，正三角形を作る確率は $\boxed{コ}$ である。

【考察】

理型生徒の小問集合の問題で，数学Ⅲの内容が中心に出題されている。出題者の意図としては，共通テストの数学ⅠAⅡB の分野については，基礎学力の確認ができたが，共通テストの不足部分として数学Ⅲの分野についての基礎学力を確認するた

めに出題されている。分数関数や無理関数，三角関数などの微分法や積分法について教科書の練習問題レベルの問題を確実に定着させることが得点アップにつながると感じた。

5 以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n{}^2+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。 m を自然数とするとき， a_{2m} は6の倍数であることを示せ。

(2) 正の実数 a に関する次の命題の真偽を答えよ。また，真であるときは証明を与え，偽であるときは反例をあげよ。ただし， $\sqrt{2}$ は無理数であることを用いてよい。

(i) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である。

(ii) a が自然数ならば $\sqrt{a}+\sqrt{2}$ は無理数である。

(3) i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が，2点 0, i を結ぶ線分の垂直二等分線上を動くとき，$w=\dfrac{2z-1}{iz+1}$ を満たす点 w のえがく図形を求めよ。

【考察】

(i)(ii) については，文型 2 の問題と共通問題となっている。(3) は複素数平面からの出題であり，典型的な問題となっているので外さないようにとおっしゃていた。複素数平面における図形を表す方程式の変形に慣れておく必要がある。減点対象となるえがく円から点 $-2i$ を除くことを忘れないようにさせたい。

6 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq x(2n-x) \end{cases}$$

の表す領域を D_n とし， D_n に属する格子点の個数を a_n とする。ただし，座標平面上の点 $(x,\ y)$ において， $x,\ y$ がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点という。

(i) D_2 を図示せよ。

(ii) a_2 を求めよ。

(iii) k を $0 \leqq k \leqq 2\pi$ を満たす整数とする。 D_n と直線 $x=k$ の共通部分に属する格子点の個数を $k,\ n$ を用いて表せ。

(iv) a_n を求めよ。

(v) 直線 $y=0$ と曲線 $y=x(2n-x)$ とで囲まれた図形の面積を b_n とする。このとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

(2) α を $0<\alpha<\pi$ を満たす実数とする。また，θ を $0 \leqq \theta \leqq \alpha$ を満たす実数とする。点 O を原点とする座標平面上において，単位円を考える。単位円の周上に点 A をとる。さらに，O を中心として，時計の針の回転と逆向きに

A を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を B

A を α だけ回転した点を C

A を θ だけ回転した点を P

A を $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を Q

とする。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とする。

(i) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{q},\ \vec{q}\cdot\vec{q}$ を求めよ。

(ii) 内積 $\vec{c}\cdot\vec{q}$ を $\alpha,\ \theta$ を用いて表せ。

(iii) $s,\ t$ を用いて， $\vec{c}=s\vec{p}+t\vec{q}$ と表すとき， t を $\alpha,\ \theta$ を用いて表せ。

(iv) (iii) で求めた t を用いて， $\vec{r}=t\vec{q}$ とおく。実数 $u,\ v$ を用いて， $\vec{r}=u\vec{a}+v\vec{b}$ と表すとき， u を $\alpha,\ \theta$ を用いて表せ。

【考察】

(1)(i)〜(iv) は文型 3 と共通問題である。(v) が追加されており，極限の問題となっている。放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を n で表した上で，基本的な数列の極限を求める問題である。(2) はベクトルと三角関数を融合した問題である。ヨットの進行方向と関連がある問題で，帆の広げ方で進行方向が変わるという話であった。 $\sin\theta\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ を積から和の公式を用いて， $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ と変形できるかが完答までのポイントとなったようである。

後期日程

1 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) $a_0=\displaystyle\int_0^1 e^{2x}dx,\ a_n=\int_0^1 x^n e^{2x}dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とおくとき， $a_0=\boxed{\text{ア}}$ であり， $2a_n+na_{n-1}=\boxed{\text{イ}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とである。

(2) 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ を考える。曲線 $y=f(x)$ 上の 3 点 A $(1,\ f(1))$，B $(4,\ f(4))$，P $(t,\ f(t))$ $(1<t<4)$ について，直線 AB の傾きは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，△ ABP の面積が最大となるとき， $t=\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $a,\ b$ を正の実数とする。関数

$$f(x)=\begin{cases} ax+2e^{ax}\ (x<0) \\ \sin\dfrac{x}{a}+b\ (x \geqq 0) \end{cases}$$

が $x=0$ で微分可能であるとき， $a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) t を媒介変数として， $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される曲線 C について， $t=\pi$ に対応する点における接線の傾きは $\boxed{\text{キ}}$ であり， C の長さは $\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) 1 から 7 までの番号が 1 つずつ書かれた 7 枚のカードの中から 1 枚のカードを引き，書かれた番号を調べて元に戻す。この試行を 3 回繰り返し，1 回目，2 回目，3 回目に引いたカードの番号を順に $a,\ b,\ c$ とする。このとき， $a<b<c$ となる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ であり， $a \leqq b \leqq c$ となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。

【考察】

理型の受験生のみの実施であるので，小問集合は，大半が数

学Ⅲ分野の内容であった。基本的な内容が中心であるが，微分可能の理解や，曲線の長さについて出題されており，教科書の細かいところまで指導する必要性がある。ドリル形式のアウトプットだけでなく，定義や公式の成り立ちや図形的意味などの深い理解を可能にする学習をしたい。(2) についての△ABPの面積が最大となるのは，点 P における接線の傾きと直線 AB の傾きが等しくなるときであることをできれば証明できるようにしてほしいとおっしゃっていた。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OC，BA，OA，BC を 1 : 2 にない分する点をそれぞれ M，N，P，Q とおくとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。

(2) n を整数とし，z を 0 でない複素数とする。$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ が実数であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)=-2\sqrt{3}\,x+2\sin 2x+1$ $(0\leqq x\leqq\pi)$を考える。

(ⅰ) $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(ⅱ) k を実数とする。$0\leqq x\leqq\pi$ において，方程式 $f(x)=k$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲を求めよ。

【考察】

(1) はベクトルの基本的な問題である。丁寧にベクトルの計算処理をしてほしい。(2) は様々な証明方法があり，考察をしてほしいとおっしゃっていた。複素数の計算として極形式を用いることで証明できるが，一般に $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ に対して，$w+\dfrac{1}{w}=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ となるが，$\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$ など丁寧に記述をするように求められていた。また，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数であるが，逆はいえないことを考えておくことが大事であるとおっしゃっていた。(3)(ⅰ)については，増減表を丁寧にかき，極値を確認することで正答できる。(ⅱ) については，グラフをかき，直線 $y=k$ との共有点を求める頻出の問題である。端点や極値の計算ミスをなくし，完答できるよう演習をしておきたい。

$\boxed{3}$ t を $0<t<4$ を満たす実数とする。座標平面上において，中心が点T $(1,\ t)$，半径が 1 の円を C とする。2 点 O $(0,\ 0)$，A $(0,\ 4)$ から C に引いた接線をそれぞれ l，m とおく。ただし，l，m は y 軸ではないとする。

以下の問いに答えよ。

(1) C の方程式を t を用いて表せ。

(2) l の方程式を t を用いて表せ。

(3) m の方程式を t を用いて表せ。

(4) l と m が交点をもち，その交点の x 座標が正であるとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(5) t の値が (4) の範囲にあるとき，l と m の交点を P とおく。△ OAP の面積の最小値を求めよ。

【考察】

(1)～(3) については，図形と方程式の分野の公式を定着させておくことで難しくない問題である。文字を含んだ計算については演習が必要である。(4) は，2 直線の交点の x 座標を求め，正となるようにして解くこともできるが，図形的な意味を考えることで，(直線 l の傾き)>(直線 m の傾き) であることを読み取ることができれば，計算過程が容易となる。(5) は，微分法を用いて増減表から最小値を求めることができる。

4 まとめ

全ての問題を通して，基本的な知識･理解を問う問題となっており，受験生の努力の成果を図ることができる良問であった。その中にある応用的な内容の問題については，論理的に考察し，論述できる力が必要である。また，様々な別解を紹介していただいた。普段の授業の中で別解に触れる機会を増やすことで，難問への取り組む意欲の向上や，多角的な見方・考え方を養うことで様々なアプローチの仕方を身に付けることができる。入試問題を活用することで，生徒の数学力を向上させ，進路実現につなげていきたい。