国公立大学入試問題の研究
－はさんで解く数学Ⅲの問題（難関大学の入試問題より）－

愛媛県立松山東高等学校　　高田　潤哉

１　はじめに

近年、難関大学であっても癖のある難問から、定番･定石といった問題や難問といっても基本的な知識がしっかりと定着していれば解くことができる問題が増えてきたように思う。あまりにも難しすぎると差がつきにくいのか、それとも基本的な知識の定着とその活用がどれだけ身についているのか見たいのか。難化や易化は当然あるが、その中でも高校数学の重要事項は基礎から応用までしっかりと身につけておくことが肝要である。

さて今回は、はさみうちの原理に代表されるように、何らかの結論を得るときにその上限や下限を考えて、その間にはさまったものの値がどうなるのかを考えさせる問題に注目してみた。いくつかのパターンは考えられるが、難関大学の近年の入試問題（数学Ⅲ）からいくつかピックアップして紹介する。

２　大学入試問題の考察

※以下解答は適度に省略しています。

ア　グラフではさむ

＜2023　北海道大　理系前期＞

以下の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1)　k を実数の定数とし，$f(x)=xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ としてよい。

(2)　$xye^{-(x+y)}=c$ を満たす正の実数 x，y の組がただ１つ存在するときの c の値を求めよ。

(3)　$xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ を満たす正の実数 x，y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(1)　まずは定数分離の考え方

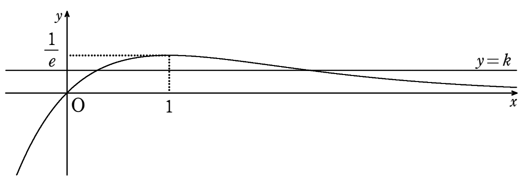
$f'(x)=(1-x)e^{-x}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，　$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

であるから，増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	

グラフは下図のようになる。



よって，求める個数は

$$\begin{cases} k\leqq 0 \text{ のとき，1個} \\ 0<k<\dfrac{1}{e} \text{ のとき，2個} \\ k=\dfrac{1}{e} \text{ のとき，1個} \\ \dfrac{1}{e}<k \text{ のとき，0個} \end{cases}$$

(2)　(1) のグラフを参考に考える

(1) の $f(x)$ を用いて，$xye^{-(x+y)}=c$ は

$f(x)f(y)=c$　……　①

と表せる。

y が正の実数であるから，(1) の $f(x)$ のグラフを参照し，

$f(y)=ye^{-y}>0$

よって，① は

$$f(x)=\frac{c}{f(y)}$$

である。これを x の方程式とみて，正の実数 x がただ１つだけ存在するには，(1) のグラフより

$\dfrac{c}{f(y)}=\dfrac{1}{e}$，すなわち，$f(y)=ce$ のときである。

さらにこの $f(y)=ce$ をみて，正の実数 y がただ１つだけ存在するためには，

$ce=\dfrac{1}{e}$，すなわち，$c=\dfrac{1}{e^2}$ のときである。

(3)　y の最大値も (1) のグラフでまずは考える

(2) と同様に，$xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ は，$f(x)f(y)=\dfrac{3}{e^4}$ と表せて，

$f(x)=\dfrac{\frac{3}{e^4}}{f(y)}$　……　②　となるので，このとき，

正の実数 x が存在するための条件は，(1) のグラフより

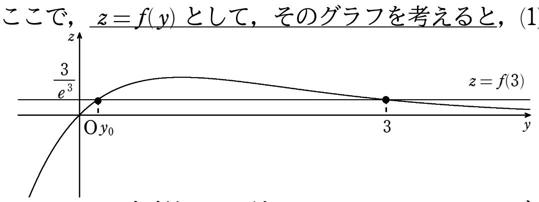
$0<\dfrac{\frac{3}{e^4}}{f(y)}\leqq\dfrac{1}{e}$　　となることである。

y も正の実数であるから，(2) と同様に，$f(y)>0$ となり

$\dfrac{f(y)}{\frac{3}{e^4}}\geqq e$　から，$f(y)\geqq\dfrac{3}{e^3}$

すなわち，$f(y)\geqq f(3)$　となる。

ここで，$z=f(y)$ として，そのグラフを考えると，(1) より



$y_0\leqq y\leqq 3$　ただし，y_0 は，$f(y_0)=f(3)$，$y_0\neq 3$ を満たす

唯一の定数となるので，y のとりうる値の最大値は 3

また，このとき，② より

$$f(x)=\frac{\frac{3}{e^4}}{f(3)}=\frac{\frac{3}{e^4}}{\frac{3}{e^3}}=\frac{1}{e}\text{ となるので,}$$

$x=1$ となる。

＜考察＞

関数のグラフを意識させ，その求める値を 2 つのもので「はさんで」考えさせる問題はよくある。特に定数分離で上限と下限を考える問題はよく見かけるが，ここでは，そこからさらに一歩踏み込んで，$z=f(y)$ のグラフを考えることで，y の上限と下限を見つけている。この問題全般にわたって，(1) のグラフを意識しなければならないところが面白くもあり，難解でもあると思う。基本的な事柄から，それを生かした考え方が問われている。

イ　はさみうちの原理

＜2023　東北大　理系前期＞

関数 $f(x)=\sin 3x+\sin x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ。

(2)　正の整数 m に対して，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。

極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

(1)　$\boxed{\text{まずは三角方程式を解く}}$

3 倍角の公式により

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin 3x+\sin x=3\sin x-4\sin^3 x+\sin x\\&=4\sin x-4\sin^3 x=4\sin x(1-\sin^2 x)\\&=4\sin x(1+\sin x)(1-\sin x)\end{aligned}$$

よって，$f(x)=0$ とすると　　$\sin x=0,\ \pm 1$

ゆえに，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x は，

$x=\dfrac{n\pi}{2}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ と表せる。

したがって，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，

最小のものは　$x=\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$\boxed{\text{はっきりしない } \dfrac{p(m)}{m} \text{ をどう表すかがポイント}}$

2 以上の正の整数 m に対して，$\dfrac{k\pi}{2}\leqq m<\dfrac{k+1}{2}\pi$ を満たす正の整数 k がただ 1 つ存在する。このとき，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものは，(1) より，

$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{k\pi}{2}$ の k 個あるから $p(m)=k$

$\dfrac{k\pi}{2}\leqq m<\dfrac{k+1}{2}\pi$ について

$\dfrac{k\pi}{2}\leqq m$ から $k\leqq\dfrac{2m}{\pi}$，$m<\dfrac{k+1}{2}\pi$ から $k+1>\dfrac{2m}{\pi}$

よって　　$\dfrac{2m}{\pi}-1<k\leqq\dfrac{2m}{\pi}$

ゆえに　　$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{m}<\dfrac{p(m)}{m}\leqq\dfrac{2}{\pi}$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)=\frac{2}{\pi}$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\frac{2}{\pi}$

$\boxed{\text{別解}}$ $\boxed{\text{ガウス記号で表すのもよい}}$

(1) から，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x は

$x=\dfrac{n\pi}{2}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

よって，$0<x\leqq m$ を満たす n は，$\dfrac{2m}{\pi}$ 以下の自然数である。

すなわち　　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \left[\dfrac{2m}{\pi}\right]$

ただし，$[y]$ は y を超えない最大の整数を表す。

ゆえに　　$p(m)=\left[\dfrac{2m}{\pi}\right]$

ここで，$\dfrac{2m}{\pi}-1<\left[\dfrac{2m}{\pi}\right]\leqq\dfrac{2m}{\pi}$ と表せるから

$m>0$ のとき　　$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{m}<\dfrac{p(m)}{m}\leqq\dfrac{2}{\pi}$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}\right)=\frac{2}{\pi}$ であるから　　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\frac{2}{\pi}$

＜考察＞

「はさむ」といったら定番のはさみうちの原理を用いて解く問題である。(1) で基礎計算力を問いながら、(2) では $p(m)$ をどう考えるか、そして $\dfrac{p(m)}{m}$ を何ではさめばよいのか、受験生の力が問われている。

ウ　与えられた不等式を利用する

＜2023　大阪大　前期理系＞

n を 2 以上の自然数とする。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n\leqq(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)$

(1)　$\boxed{\text{第 2 辺を確定させ，第 1 辺・第 3 辺と } f(x) \text{ の差をとる}}$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$f(x)=(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\quad\cdot\cdot\cdot\ ①$$

とおくと，$-x\fallingdotseq 1$ であるから

$$\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{-x\{1-(-x)^{n-1}\}}{1-(-x)}=\frac{-x-(-x)^n}{x+1}$$

よって

$$\begin{aligned}f(x)&=(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\frac{-x-(-x)^n}{x+1}\right\}\\&=(-1)^n\cdot\frac{1-(x+1)+x+(-x)^n}{x+1}\\&=(-1)^n\cdot\frac{(-x)^n}{x+1}=\frac{x^n}{x+1}\end{aligned}$$

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)-\frac{1}{2}x^n=\frac{x^n}{x+1}-\frac{1}{2}x^n=\frac{2x^n-x^n(x+1)}{2(x+1)}$$
$$=\frac{x^n(1-x)}{2(x+1)}\geqq 0$$

また

$$x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}-f(x)=x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{x^n}{x+1}$$
$$=\frac{2(x+1)x^n-x^{n+1}(x+1)-2x^n}{2(x+1)}$$
$$=\frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{2(x+1)}$$
$$=\frac{x^{n+1}(1-x)}{2(x+1)}\geqq 0$$

よって，与えられた不等式は成り立つ。

(2)　$\boxed{\text{各辺の定積分を計算し，最後ははさみうちの原理}}$

①の各辺を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で積分すると

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^n dx\leqq\int_0^1 f(x)dx\leqq\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$$

ここで

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^n dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2(n+1)}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx$$
$$=(-1)^n\left\{\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-1\right)dx-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{k-1}dx\right\}$$
$$=(-1)^n\left\{\Big[\log|x+1|-x\Big]_0^1-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1\right\}$$
$$=(-1)^n\left\{\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}$$
$$=(-1)^n\left\{\log 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}$$
$$=(-1)^n(\log 2-a_n)$$

$$\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}$$

よって　$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n(\log 2-a_n)\leqq\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2(n+2)}$

各辺に $-n\,(<0)$ を掛けると

$$-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\leqq(-1)^n n(a_n-\log 2)\leqq-\frac{n}{2(n+1)}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right\}$$
$$=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{2(n+1)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

したがって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)=-\frac{1}{2}$$

<考察>

最終的には「はさみうち」になるので，イに含めてもよかったのだが，まずはこの不等式の証明から考えなければならないことで分けて考えた。はさむ不等式が見えているとはいえ，その証明には基礎･基本の理解と計算力が必要である。(2) は難問というわけではなく，よく見かける級数の問題である。比較的解答の方針が立てやすく、計算も部分ごとに進めていけばよいので，数Ⅲの基本的な計算力がしっかりと身についており，定番･定石といった問題を解き慣れていれば最後まで解き進めることができたのではないだろうか。改めて基礎計算力の大切さを感じる。

類題として，以下の問題も紹介しておく。これも問題を解く方向性は見えていても難解である。

【類題】

<2023　東京大　理系>

(1)　正の整数 k に対し，$A_k=\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(x^2)|dx$ とおく。

次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2)　正の整数 n に対し，$B_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}|\sin(x^2)|dx$ とおく。

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n$ を求めよ。

(1)　$A_k=\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(x^2)|dx$ について，$x^2=t$ とおくと

$2xdx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$\sqrt{k\pi}\ \to\ \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi\ \to\ (k+1)\pi$

$x>0$ のとき，$x=\sqrt{t}$ であるから

$$dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

よって　　$A_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,dt$

$k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ であるから　$0<\sqrt{k\pi}\leqq\sqrt{t}\leqq\sqrt{(k+1)\pi}$

これと $|\sin t|\geqq 0$ から　　$\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\leqq\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$

この不等式が閉区間 $[k\pi,\ (k+1)\pi]$ で成り立つから，

$I_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$ とおくと

$$\frac{I_k}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{I_k}{2\sqrt{k\pi}}$$

k は整数であるから，閉区間 $[k\pi,\ (k+1)\pi]$ において，

$\sin t$ は常に 0 以上の値，または

常に 0 以下の値をとる。

よって　$I_k=\left|\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\ dt\right|=\left|\Big[-\cos t\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right|$
$$=|-(-1)^{k+1}+(-1)^k|=|2(-1)^k|=2$$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$　……①

(2)　はさみうちの原理，解説は略

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}$$

エ　定積分ではさむ

＜2023　東京工業大　前期＞
実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}dx$ の整数部分を求めよ。

まずはこの関数をはさむことができる関数を求める

$f(x)=xe^{-x}$ $(x \geqq 0)$ とすると，$f(x) \geqq 0$ であり
$f'(x)=(1-x)e^{-x}$ であるから，
$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘

よって，

$$0 \leqq f(x) \leqq e^{-1}$$

$$\therefore \quad 0 \leqq x \leqq e^{-1}e^x \quad (x \geqq 0)$$

よって，$x \geqq 0$ のとき，この各辺に $e^x>0$ を加えて

$$e^x \leqq x+e^x \leqq (1+e^{-1})e^x$$

したがって，

$$\frac{1}{(1+e^{-1})e^x} \leqq \frac{1}{x+e^x} \leqq \frac{1}{e^x}$$

よって，

$$\frac{2}{(1+e^{-1})e^x} \leqq \frac{2}{x+e^x} \leqq \frac{2}{e^x}$$

$$\frac{2e}{e+1}e^{-x} \leqq \frac{2}{x+e^x} \leqq 2e^{-x} \qquad (x \geqq 0)$$

次に各辺の定積分をとり，整数値で I をはさむ

ここで，$I=\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx$ とおくと，

$$\frac{2e}{e+1}\int_0^{2023} e^{-x}dx \leqq I \leqq 2\int_0^{2023} e^{-x}dx$$

また，$\displaystyle\int_0^{2023} e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{2023} = 1-e^{-2023}$

であるから

$$\frac{2e}{e+1}(1-e^{-2023}) \leqq I \leqq 2(1-e^{-2023})$$

$\dfrac{2e}{e+1}(1-e^{-2023})>1$，$2(1-e^{-2023})<2$ であるから

$$1<I<2$$

よって，I の整数部分は1である。

＜考察＞

区分求積法にもあるように，定積分を直接求めることができないまたは難しい場合に，その関数をはさむ別の関数の定積分で考える定番の問題であるが，この問題では，はさみうちのように最後は極限をとるのではなく，定積分が計算しやすくなった各辺の値の上限または下限を整数値でおさえる。はさむ不等式が見えていないので難しい。

なお，難化傾向が進む九州大だが，以下のように定義や公式の理解がしっかりとできていることが必要な問題も出題されており，本質的な内容理解の重要性を強く感じた。ここでは，問題の紹介にとどめる。

【類題】

＜2022　九州大　前期理系＞

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x)=f(x)$ となる関数$F(x)$ を1つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。
定積分は次の性質(A)，(B)，(C)をもつ。

(A)　$\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx$

(B)　$a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(C)　区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$
ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx \geqq \int_a^b h(x)dx$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。定積分の性質 ア $\boxed{}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式②と定積分の性質 イ $\boxed{}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n} \quad \cdots\cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つ。

(1)　関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，
$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$ が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義①を用いて，定積分の性質(A)で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

を示せ。

(2)　定積分の定義①と平均値の定理を用いて，次を示せ。
$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において

$$g(x)>0 \text{ ならば，} \int_a^b g(x)dx>0$$

(3)　(A)，(B)，(C)のうち，空欄 ア $\boxed{}$ に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式②を示せ。

(4)　(A)，(B)，(C) のうち，空欄 $^{イ}\boxed{}$ に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

〔問題文はここまで〕

オ　単調増加や単調減少であることを示し，その定義域ではさむ

＜2023　京都大　前期理系＞

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e=2.71\cdots$ である。

$\boxed{\text{まずは"かたまり"を } t \text{ とおいて，} t \text{ について考える}}$

$t=g(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1$ とする。

このとき　$f(x)=t+\frac{1}{t}$

$g(-x)=g(x)$ より，$g(x)$ は偶関数であるから，

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲を考える。

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}+\frac{1}{2}x=\frac{x\left(e^{x^2}-4\right)}{2e^{x^2}}$$

$0<x<1$ で，$\frac{x}{2e^{x^2}}>0$ であり，$e^{x^2}<e^1<4$ であるから

$g'(x)<0$　ゆえに，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に減少する。

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，t のとりうる値の範囲は

$g(1)\leqq t\leqq g(0)$

すなわち

$\frac{4+5e}{4e}\leqq t\leqq 2$

$\boxed{\text{次に，} t \text{ についての関数 } h(t) \text{ で } f(x) \text{ を考える}}$

$h(t)=t+\frac{1}{t}\quad\left(\frac{4+5e}{4e}\leqq t\leqq 2\right)$　とすると

$h'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0$

よって，$h(t)$ は $\frac{4+5e}{4e}\leqq t\leqq 2$ で単調に増加する。

ゆえに　$h\left(\frac{4+5e}{4e}\right)\leqq h(t)\leqq h(2)$

ここで，$f(x)=t+\frac{1}{t}$ より　$h\left(\frac{4+5e}{4e}\right)\leqq f(x)\leqq h(2)$

また，$h\left(\frac{4+5e}{4e}\right)=\frac{4+5e}{4e}+\frac{4e}{4+5e}$，$h(2)=\frac{5}{2}$ から，

$f(x)$ は最大値 $\frac{5}{2}$，最小値 $\frac{4+5e}{4e}+\frac{4e}{4+5e}$ をとる。

＜考察＞

数学Ⅲの関数は一見複雑そうに見えるが，その対称性や置き換え等に注目することによってよりシンプルな定義域，関数として見ることができる場合がある。$f'(x)$ を求めてもかまわないが，その計算は大変であろう。この問題では，その関数が単調増加または単調減少になることで，その区間の両端で最大値と最小値を抑えることができる。対称性等も含め，そのことに気づける力も持っておきたい。

３　おわりに

今回のテーマは「はさむ」であった。途中ガウス記号を使った別解を紹介したが，今回は数学Ⅲの範囲にしぼったため参考程度に留めている。なお，2021年度の名古屋大理系では，ガウス記号を使った出題がなされており，なかなかの難問である。よかったら見てほしい。

さて，様々な問題がある中で，その多くには触れることができなかったが，近年の難関大学の入試問題から考察すると，数学的な考え方としては定番でどこの大学でもよく見られる問題であっても，難関大学だからこそのもう一歩深い理解の求めに対して受験生は対応していかなければならない。定番･定石といった良問で各分野の本質的な理解を深めながら考える力を高め，難問への対応力や応用力を鍛える努力が必要である。迷ったときは基礎･基本に立ち返ることで救われるとよく言うが，受験生は，すぐに模範解答に頼るのではなく，これまで学んだことを今一度頭の中で整理し，少しはじっくりよくその問題と向き合う時間も持ってほしいと思う。

最後に，今回参考にしたわずか数年の間だけでも「はさむ」ことを意識した問題がかなり出題されており，同レベルの他大学の入試問題から学べることも多い。当然そういった視点で学習している生徒が多いと思うが，それに加えて自分の数学Ⅲの基礎計算力の強さを図る指標としてもうまく利用してほしいと思う。

＜参考資料＞

2024年受験用　全国大学入試問題正解　数学　国公立大　編
2023年受験用　全国大学入試問題正解　数学　国公立大　編
2022年受験用　全国大学入試問題正解　数学　国公立大　編