

大学入試研究委員会

本研究委員会は、6名の研究員で構成されています。継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれて努力を続けてきました。本年度の研究一覧は以下の通りです。

大学入試センター試験に関するアンケートにつきましては、県下の受験生や先生方のご協力をいただき、本年度も集計・分析を終え報告する運びとなりました。ありがとうございました。

先生方のご意見、ご指導をいただき、今後の研究活動に生かしていきたいと思っておりますので、よろしくお願い申し上げます。

- 1 中四国の国立大学入試問題の研究（数学Ⅲ）
－3カ年の分析を通して－
愛媛県立今治西高等学校 青木 将彦

- 2 中四国の国立大学入試問題の研究
－AO・推薦入試の問題から－
愛媛県立宇和島東高等学校 大塚 隆三

- 3 平成24年度大学入試センター試験アンケートの分析
愛媛県立新居浜西高等学校 青野 洋介
愛媛県立西条高等学校 真田 幸治
愛媛県立松山北高等学校 黒河 知子

- 4 平成24年度愛媛大学入試問題（数学）の研究
愛媛県立松山南高等学校 近藤 弘法

中四国の国立大学入試問題の研究（数学Ⅲ）

－3カ年の分析を通して－

愛媛県立今治西高等学校 青木 将彦

1 はじめに

今年度授業を担当している本校3年生の理系生徒を対象に、中四国地区における国立大学の数学Ⅲに関連する入試問題を演習した。国立大学2次試験で出題される数学Ⅲの入試問題は、「極限」、「微分法」、「積分法」が融合問題として出題される場合が多い。現役生にとって、演習量が不足気味になりがちな分野をできるだけ早い時期から取り組み、強化できるかが課題である。

今回は、過去3年分における中四国地区国立大学の前期試験の傾向を分析した。その中から、本校生徒の実態に合った2題の入試問題を予習させ、生徒の答案を分析した上で、授業で解説を試みた。

2 2010年度入試中国地区国立大学入試出題状況（前期）

		鳥取	島根	岡山	広島	山口
関数	分数関数					
	無理関数					
	逆関数					
	合成関数					
極限	数列の極限	医				◎
	無限等比数列					
	無限級数		○			
	関数の極限		医	○		
	三角関数と極限					
	関数の連続性					
微分	微分係数と導関数	○				
	接線と法線	○	○			
	平均値の定理					◎

分法	極大値と極小値	○	医			
	最大値と最小値			○	○	
	関数のグラフ	○	医			
	方程式・不等式		医			
積分	速度・加速度					
	置換積分法					
	部分積分法	○				
	その他の積分法			○	○	
	関数の決定	○	○			
	区分求積法					
分法	定積分と不等式					
	面積	○				
	体積		○			☆

医：医学部 ◎：理学部（数理科学）・医学部

☆：教育学部・理学部（物理・情報科学・地球圏システム科学）・工学部・農学部（獣医）

(1) 極限

医学部を中心に特別問題で出題される傾向がある。岡山大（関数の極限）は、図形を利用した問題であり、良問である。

(2) 微分法

極値、グラフの凹凸の確認をさせ、グラフをかかせる問題は頻出であり、基本的な計算力が必要である。

(3) 積分法

三角関数、指数・対数関数を利用した定積分の問題が広島大と岡山大で出題されている。特に、広島大は絶対値の定積分であり、得点差がつきやすい。他大学は、面積や体積のいずれか一方を求めさせる問題が出題されており、演習を十分行っていれば対応できる。

3 2010年度入試四国地区国立大学入試出題状況（前期）

		徳島	香川	愛媛	高知
関数	分数関数				
	無理関数				
	逆関数				
	合成関数				
極限	数列の極限	◎			
	無限等比数列				
	無限級数				
	関数の極限				○
	三角関数と極限				
	関数の連続性				
微分法	微分係数と導関数				
	接線と法線		医		
	平均値の定理				
	極大値と極小値			○	
	最大値と最小値	◎☆	△		
	関数のグラフ				
	方程式・不等式	◎☆			
	速度・加速度		▲		
積分法	置換積分法			○	
	部分積分法				
	その他の積分法				
	関数の決定				
	区分求積法				
	定積分と不等式			○	
	面積	◎☆	医		
体積		▲			

◎：徳島大医学部（医・栄養）・歯学部・薬学部

☆：徳島大医学部（保健）・工学部・総合科学部

△：香川大教育学部・農学部

▲：香川大工学部

医：医学部

(1) 極限

徳島大のはさみうちの原理を利用した数列の極限に関する問題と高知大の図形の性質を利用した関数の極限に関する問題は、演習しておきたい問題である。

(2) 微分法

極値、グラフの凹凸の確認をさせ、グラフをかかせる問題がよく出題されている。香川大工学部の速度と速さに関する問題が大問で出題されているのが特徴である。

(3) 積分法

徳島大（医・歯・薬）と香川大（医）は、面積を求める問題が出題されており、計算量が多い。根気が必要。

4 2011年度入試中国地区国立大学入試出題状況（前期）

		鳥取	島根	岡山	広島	山口
関数	分数関数					
	無理関数					
	逆関数					
	合成関数					
極限	数列の極限					
	無限等比数列		○医			
	無限級数		○医	○		
	関数の極限					
	三角関数と極限					
	関数の連続性					
微分法	微分係数と導関数		○			
	接線と法線	○医		○		
	平均値の定理					
	極大値と極小値	医	○医			
	最大値と最小値			○		
	関数のグラフ	医	○医			
	方程式・不等式					
	速度・加速度					
積分法	置換積分法	医		○		
	部分積分法	○医	○			○
	その他の積分法				○	
	関数の決定					
	区分求積法		○医			
	定積分と不等式					
	面積	○医		○		
体積	○医	○				

医：医学部

(1) 極限

島根大は、図形を利用した無限等比級数の問題である。丁寧に解答していけば、基本的な問題である。岡山大は、部分分数に分解してから、無限級数が収束することを確認した方が、容易に解ける。

(2) 微分法

鳥取大と島根大の医学部は、関数の増減、凹凸、グラフをかかせる問題であり、基本的な計算力を試している。岡山大は、関数の最大値に関する問題が2年連続で出題され、頻出である。

(3) 積分法

部分積分法を利用した計算問題がよく出題されている。広島大は、三角関数を利用した定積分の問題が出題されているのみで、数学Ⅲの出題率が低かった。また、鳥取大医学部は、接線、面積、体積を求める典型的な問題。

5 2011 年度入試四国地区国立大学入試出題状況 (前期)

		徳島	香川	愛媛	高知
関数	分数関数				
	無理関数				
	逆関数				
	合成関数				
極限	数列の極限	○		医	
	無限等比数列				
	無限級数		医		
	関数の極限			○医	○
	三角関数と極限				
	関数の連続性			医	
微分法	微分係数と導関数			医	
	接線と法線	○			
	平均値の定理				
	極大値と極小値	○		○医	
	最大値と最小値			○	
	関数のグラフ			○医	
	方程式・不等式				
	速度・加速度				
積分法	置換積分法			○	
	部分積分法		医	○医	○
	その他の積分法	○			
	関数の決定				○
	区分求積法				
	定積分と不等式				
	面積	○	医		
体積		○			

医：医学部

(1) 極限

徳島大の極限は、面積を求めさせてから、それを用いて数列として極限を考えさせている。(2)の面積を計算できるかがポイントである。香川大医学部と愛媛大は、図形の面積や定積分を求めさせた後で、極限を計算させている。合否への影響が大きいと考えられる。

(2) 微分法

愛媛大は、基本的な最大値を求めさせる問題が出題されている。また、関数の増減、凹凸、グラフをかかせる問題は、徳島大、愛媛大ともに多少の計算力は必要であるが、十分な演習量で対応できる。

(3) 積分法

部分積分法を利用した定積分、面積を求めさせる問題が多い。どの大学も、演習量の差が合否に直結する1題となっていることは、間違いなさそうである。

6 2012 年度入試中国地区国立大学入試出題状況 (前期)

		鳥取	島根	岡山	広島	山口
関数	分数関数					
	無理関数					
	逆関数					
	合成関数			○		◎
極限	数列の極限	医	○			
	無限等比数列					
	無限級数					
	関数の極限		医		○	
	三角関数と極限					
	関数の連続性					
微分法	微分係数と導関数		医			
	接線と法線					
	平均値の定理					
	極大値と極小値	医	○		○	
	最大値と最小値	○医		○		☆
	関数のグラフ		医		○	
	方程式・不等式			○		
	速度・加速度					
積分法	置換積分法					◎
	部分積分法		○	○		
	その他の積分法					
	関数の決定	○医				
	区分求積法	医				
	定積分と不等式	医				
	面積		○		○	◎
体積			○			

医：医学部 ◎：理学部（数理科学）・医学部

☆：教育学部・理学部（物理・情報科学・地球圏システム科学）・工学部・共同獣医学部

(1) 極限

鳥取大医学部は、区分求積法、定積分と不等式の関係を考えさせた後、はさみうちの原理を用いた極限を求めさせる問題である。医学部でよく見かける問題である。

(2) 微分法

岡山大は、指数関数を用いて最小値を考えさせる問題である。3年連続で最大値または最小値を求めさせているのは、特筆に値する。

広島大も、指数関数を利用して関数の増減、凹凸、グラフを考察させている。両大学とも基本レベルである。

(3) 積分法

岡山大は体積、広島大は面積を求めさせている。置換積分法や部分積分法を用いた計算力を試している。

7 2012 年度入試四国地区国立大学入試出題状況 (前期)

		徳島	香川	愛媛	高知
関数	分数関数		△		
	無理関数				
	逆関数				
	合成関数				
極限	数列の極限		医	○医	○
	無限等比数列				
	無限級数				
	関数の極限	◎			
	三角関数と極限				
	関数の連続性				
微分	微分係数と導関数				
	接線と法線	◎☆	医	○医	
	平均値の定理				
	極大値と極小値				
	最大値と最小値	☆		○医	
	関数のグラフ				
法	方程式・不等式				○
	速度・加速度				
積分	置換積分法				
	部分積分法	☆	医	○医	○
	その他の積分法				
分	関数の決定				
	区分求積法	◎			
法	定積分と不等式				
	面積		医	○医	
	体積	☆	▲	○	

◎：徳島大医学部 (医・栄養)・歯学部・薬学部
 ☆：徳島大医学部 (保健)・工学部・総合科学部
 △：香川大教育学部・農学部 ▲：香川大工学部
 医：医学部

(1) 極限

徳島大医・歯・薬学部と香川大医学部で出題されている。香川大は、接線と面積を求めた後に問題され、やや計算量が多い。徳島大は、やや抽象的で極限を求めさせた後に、区分求積法を出題しており、医歯薬系らしい問題である。

(2) 微分法

接線を求めさせた後に、面積や2点間の距離を求めさせる問題が目立つ。どの大学も素直な問題であり、解答の指針は立てやすい。香川大と徳島大よりも愛媛大の方が計算量は多い。

(3) 積分法

やはり部分積分の基本的な計算力を試しながら、面積

や体積を計算させる問題が目立つ。徳島大と愛媛大は、良問であるが、香川大は抽象的で計算に時間がかかる。

8 入試問題出題例

2012 年度 広島大学 [前期] 理・工・医・歯・薬・教育・総合科学・生物生産

関数 $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減、グラフの凹凸および変曲点を調べ、グラフの概形をかけ。

(3) $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して、曲線 $y = f(x)$, 3 直線 $x = t, x = 0$ および $y = \alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ の値を求めよ。

< 解答 >

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = 1$

また、 $-x = t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ より $t \rightarrow \infty$ となるので、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = 0$

(2) $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

ここで、すべての実数 x の値に対して、 $f'(x) > 0$ となるので、関数 $f(x)$ は単調に増加する。

また、 $f''(x) = e^x \cdot (1+e^x)^{-2} + e^x \cdot \{-2(1+e^x)^{-3}\} \cdot e^x$
 $= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$

$f''(x) = 0$ を解くと、 $e^x > 0$ より $1 - e^x = 0$ すなわち、 $e^x = 1$ より $x = 0$

$x < 0$ のとき、 $f''(x) > 0$ だから下に凸

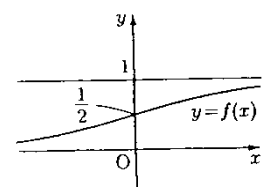
$x > 0$ のとき、 $f''(x) < 0$ だから上に凸

したがって、 $x = 0$ は変曲点をとる x 座標であり、

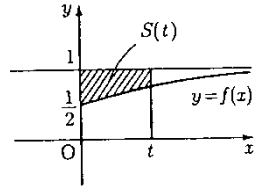
$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ だから、変曲点は $(0, \frac{1}{2})$ となる。

(1) より漸近線は、 $y = 1$ および $y = 0$ であり、

グラフの概形は次のとおり



- (3) (1) より、 $\alpha = 1$ であり
求める面積は次のとおり



$$\begin{aligned} S(t) &= 1 \cdot t - \int_0^t f(x) dx = t - \int_0^t \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ &= t - [\log|1 + e^x|]_0^t \\ &= t - \log(1 + e^t) + \log 2 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \log e^t - \log(1 + e^t) + \log 2 \} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(\frac{e^t}{1 + e^t} \right) + \log 2 \right\} \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

2011 年度 岡山大学 [前期] 理・医・歯・薬・工・
環境理工・農・教育

n を自然数とする。
 曲線 $y = x^2(1-x)^n$ ($0 \leq x \leq 1$) と
 x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。
 (1) S_n を求めよ。
 (2) $T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$
 を求めよ。

< 解答 >

- (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、常に $y \geq 0$ である。

すなわち、 $S_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$ となる。

$1-x = t$ とおくと、 $dx = -dt$ であり、

x	0	\rightarrow	1
t	1	\rightarrow	0

となるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_1^0 (1-t)^2 \cdot t^n \cdot (-dt) \\ &= \int_0^1 (t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} - \frac{2}{n+2} t^{n+2} + \frac{1}{n+3} t^{n+3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

- (2) S_1 から S_n までの部分 and T_n を求める。

$$\begin{aligned} T_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right\} + \dots \\ &\quad \dots + \left\{ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{6}$

9 入試問題の分析および考察

(対象生徒：3年生 理系1クラス，設定時間 50分)

2012 年度 広島大学 [前期] 理・工・医・歯・薬・

教育・総合科学・生物生産

< 正誤表 > (単位：%)

	(1)	(2)	(3)	(4)
正 答	56	38	25	6
誤 答	38	56	25	13
無 答	6	6	50	81

< 主な誤答例 >

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

- (2) 増減表も記入しておらず、「 $x < 0$ のとき $f''(x) > 0$ ，
 $x > 0$ のとき $f''(x) < 0$ となるので、 $x = 0$ で変曲
点をもつ」という確認が不十分である。

$f'(x)$ は計算できているが、常に単調に増加することを
理解できていない。

- (3) $y = f(x)$ と y 軸， x 軸，および $x = t$ で囲まれた
図形の面積を求めている。

定積分 $\int_0^t \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$ の計算ができない。

- (4) $\lim_{t \rightarrow \infty} \{ t - \log(1 + e^t) \}$ について、不定形を解消

できていない。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \log \frac{1+e^t}{2}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t \log e - \log(1+e^t)}{2}$$

〈考察〉

- (1) 概ねできていた。途中式を省略して、直感で考えた生徒の方が勘違いをしていた。
- (2) $f'(x)$, $f''(x)$ の計算はできていた。しかし、 $f'(x) = 0$ を解くと、 $x = 0$ になるという答案や、 $f''(x) = 0$ を解くと、 $x = 1$ になるという答案もあり、基本的な指数の方程式を解く力が身に付いていない。
- (3) 求める面積を勘違いしている答案が目立った。面積の立式はできていたが、計算できない生徒もいた。
- (4) (3) まで完答できた生徒の 25% が対象となった。
 $\infty - \infty$ の不定形の極限であるが、どのように解消すればよいのか思いつかなかったようである。また、対数の基本的な計算が誤っていた生徒もおり、完答できた生徒は少数であった。

2011 年度 岡山大学 [前期] 理・医・歯・薬・工・環境理工・農・教育

〈正誤表〉 (単位: %)

	(1)	(2)
正答	19	13
誤答	56	13
無答	25	74

〈主な誤答例〉

- (1) 部分積分法で解いた場合

$$S_n = \left[\frac{x^3}{3} (1-x)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 (1-x)^{n-1} dx$$

$$S_n = \frac{1}{n+1} [x^2 (1-x)^{n+1}]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 x (1-x)^{n+1} dx$$

置換積分法で解いた場合

$$1-x = t \text{ とおくと、} dx = -t dt$$

$$x: 0 \rightarrow 1 \text{ より } t: 0 \rightarrow 1 \text{ と対応させている。}$$

- (2) 部分積分法で (1) が正解した場合

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

の計算ができていない。

置換積分法で (1) が正解した場合

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3} \right) \text{ の計算ができていない。}$$

〈考察〉

- (1) 面積 S_n を具体的にイメージできなかった生徒もいたようであり、 S_1 , S_2 , ... を計算して S_n を推測していた。
- (2) 部分分数を式変形すればよいことに気付いていない生徒がいた。(1) を置換積分法で計算した生徒の方が、部分積分法で計算した生徒よりも正答率が高かった。

10 おわりに

昨年度の入試では、易化傾向にあり数学Ⅲの出題割合が広島大、岡山大を中心に減少した。さらに、両大学とも大問が 1 題のみ出題され、基本的な問題であった。他大学も典型的な演習問題を解いていれば、十分に対応できる。

しかし、揺れ戻しもあり、今後も続くとは限らない。基本的・標準的なパターンの解法を修得することも大切であるが、時間が許す限り思考力を要する問題にも貪欲にチャレンジして理解を深めることも大切であると、放課後の教室で学び合う生徒の姿を見て感じている。

【参考文献】

- [1] 2011 年度受験用 全国大学入試問題正解 数学 [国公立大編] (旺文社)
- [2] 2012 年度受験用 全国大学入試問題正解 数学 [国公立大編] (旺文社)
- [3] 2013 年度受験用 全国大学入試問題正解 数学 [国公立大編] (旺文社)