平成 25 年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校　近藤　弘法

1　はじめに

5月 11 日（土）に松山南高等学校において，愛媛大学理学部　平野　幹　教授より平成 25 年度愛媛大学数学入試問題の解説があった。今年度入試については，合格・不合格をはっきり分けるため，問題のボリュームを多くしたとのことであった。では，どこでどのような間違いが生じてくるのか，本校生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

2　出題の傾向

（１）出題傾向

今年度は教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースにおいて記述４題を 100 分で，理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く），医学部医学科においては記述５題を 120 分で，工学部後期は記述５題を 120 分で解答する。

（２）出題内容

教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコース

1　小問集合
2　図形と方程式
3　微分法・積分法
4　確率

理学部，工学部

4　確率
5　小問集合
6　数列
7　行列
8　微分法・積分法

医学部医学科

6　数列
7　行列
8　微分法・積分法
9　空間図形，微分法・積分法
１０　確率

工学部後期

1　小問集合
2　小問集合
3　行列
4　微分法・積分法
5　空間図形，微分法・積分法

（３）難易度

前述のとおり，今年度は昨年度に比べ，全体的に難易度が上がったように感じた生徒が多かった。特に工学部後期についてはほとんど解けていない生徒も多かった。難易度としては基本～標準レベルの問題を中心に出題されている。小問については例年通り教科書レベルの基本問題であり，確実に完答したいところである。工学部後期については，昨年は全問記述式の問題であったが，今年度は穴埋め式の問題が$\boxed{1}$で出題されていた。確実な知識と計算力を見るためであると考えられる。その反面，後半では生徒たちがイメージしづらい空間図形の問題が出題されるなど，工学部後期については全体的にみると難化したと考えられる。

3　問題分析

本校の３年生に入試問題を解いてもらう。

３年生の文型の生徒に１～４，理型生徒に４～１０，理数科生徒に工学部後期１～５を解いてもらった。採点基準は公表されていないため，定期考査に準じて採点し，得点率と誤答例から分析を行った。

＜前期＞

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ。

(1)　θ が方程式

$$\cos 2\theta - 2\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を満たすとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) < \log_{\frac{1}{4}}(2-x)$ を解け。

(3)　x の多項式 $x^4 - px + q$ が $(x-1)^2$ で割りきれるとき，定数 p，q の値を求めよ。

(4)　空間内に５点 A，B，C，D，E があり，次の等式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ を用いて表せ。ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルである。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	55.3	52.3	75.0	65.9	62.0
標準偏差	1.7	2.5	2.7	2.7	6.2

【誤答例】

(1)　$\sin\theta$ の範囲に矛盾している。
　2倍角の公式を正確に覚えられていない。

(2)　底を変換する際に$\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2\frac{1}{4}} = 2\log_2(2-x)$ となっている。
　真数条件を考慮していない。

(3)　割り算を行い，商と余りが間違えている。

(4)　第2式を変形し，$\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ で表して終わっている。

$\boxed{2}$ 2つの直線 l_1：$y=-2x+3$ と l_2：$y=5$ の交点をA，l_2 と y 軸の交点をBとする。

(1) 点Aの座標を求めよ。

(2) Oを原点とする。3点O，A，Bを通る円の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた円を C_1 とし，円 $x^2+y^2=4$ を C_2 とする。

(ⅰ) 点 $(\alpha,\ \beta)$ が C_1 と C_2 の交点であるとき

$$\alpha-5\beta+4=0$$

が成り立つことを示せ。

(ⅱ) C_1 と C_2 の2つの交点を結ぶ線分の長さを求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3ⅰ)	(3ⅱ)	合計
得点率	100.0	82.3	62.9	22.0	66.0
標準偏差	0.0	3.1	2.9	2.1	6.7

【誤答例】

(2) Bの座標を(0，3)として計算している。

円の方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ と置いたことにより，計算しきれていない。

(3ⅰ)どのように示せばよいか理解できていない。

(3ⅱ)C_1 と C_2 の共有点の座標を求めようとして計算が間違えている。

$\boxed{3}$ $f(x)=x^2-x$ とする。

(1) 放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=2x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2)(ⅰ) 関数 $y=f(x)$ と $y=2|x|$ のグラフの共有点の座標を求めよ。

(ⅱ) 関数 $y=f(x)$ と $y=2|x|+k$ のグラフの共有点の個数が2となる定数 k の値の範囲を求めよ。

問題番号	(1)	(2ⅰ)	(2ⅱ)	合計
得点率	97.4	63.9	14.6	56.9
標準偏差	0.8	2.9	2.2	4.7

【誤答例】

(1) $\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ が使えていない。

(2ⅰ)場合分けをした際 $x=0$ が含まれていない。

(2ⅱ)$x\geqq 0$ として，$x^2-2x-k=0$ の判別式 $D>0$ としている。

$x\geqq 0$，$x<0$ のそれぞれの場合で $D>0$ としている。

$k>0$ のときに共有点が必ず2個存在することが説明できていない。

$\boxed{4}$ 1から40までの番号をつけた40枚のカードが2組ある。これら80枚のカードを袋に入れてよくかき混ぜ，同時に3枚を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) 3つの番号がすべて3の倍数である確率

(2) 3つの番号の積が3の倍数である確率

(3) 3つの番号の和が3の倍数である確率

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
文型得点率	72.7	33.2	6.2	24.9
文型標準偏差	1.9	2.0	3.2	5.3
理型得点率	75.9	62.1	9.7	39.4
理型標準偏差	2.1	2.2	3.0	5.3

【誤答例】

(1) **<文型>**

反復試行と勘違いをしている。

<理型>

反復試行と勘違いしている。

(2) **<文型>**

すべてを書き出そうとして，途中で止まっている。

3の倍数1枚と残ったカードから2枚として計算している。

余事象を答えとしている。

<理型>

3の倍数1枚と残ったカードから2枚として計算している。

(3) **<文型>**

考えられる場合が不十分である。

<理型>

すべてを書き出そうとして，途中で止まっている。

考えられる場合が不十分である。

3の倍数と3の倍数以外に分けて考えようとしているが，正しく計算できていない。

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ。（医学部希望者は除く）

(1) i を虚数単位とする。等式

$$(1+i)^{14}=a+bi$$

を満たす実数 a，b の値を求めよ。

(2) x の多項式 x^4-px+q が $(x-1)^2$ で割りきれるとき，p，q の値を求めよ。

(3) θ が方程式

$$\cos 2\theta-2\sin\theta=\frac{47}{50}$$

を満たすとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(4) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+4})\sin 2x}{x^2}$$

(5) 空間内に 5 点 A，B，C，D，E があり，次の等式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ を用いて表せ。ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルである。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	合計
得点率	73.1	73.7	39.7	57.7	68.6	62.6
標準偏差	1.7	1.5	1.1	1.8	1.8	4.1

【誤答例】

(1) 二項定理で展開し，間違えている。
$(2i)^7$ の計算を間違えている。

(2) 直接割り算をして，商または余りを間違えている。

(3) $\sin\theta$ の値の範囲に矛盾している。

(4) 分子を有理化しているが，計算できていない。
分子と分母を x で割って，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=0$ としている。

(5) 条件を使いこなせていない。

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=1,\ a_2=4,$$

$$a_{n+2}=-a_{n+1}+12a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n=a_{n+1}-3a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $c_n=a_{n+1}+4a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	72.8	71.3	59.0	36.9	60.0
標準偏差	2.1	2.1	2.5	2.4	7.8

【誤答例】

(1) b_1 が正しく求められていない。
$(-4)^{n-1}=4^{n-1}$ または -4^{n-1} となっている。
推測で答えを導いている。

(2) c_1 が正しく求められていない。
推測で答えを導いている。

(3) (1) または (2) が間違えている。
階差数列と勘違いしている。

(4) (3) が間違えている。

$\boxed{7}$ 行列 $\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{4}\\ a & b\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする。

f は3 点A$(1,\ m)$，B$(0,\ 1)$， C$(m,\ -1)$ に対して，次の 2 つの条件 ①，② を満たすものとする。ただし，O は原点である。

① A の f による像は A 自身である。

② B の f による像を B$'$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と垂直である。

(1) a，b，m の値を求めよ。

(2) P$(x,\ y)$ を任意の点とし，P の f による像をP$'$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(3) 点Q$(t,\ t^2-1)$ の f による像を Q$'$ とする。$|\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}|$ の値が最小となる実数 t の値を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	49.9	36.5	15.8	35.3
標準偏差	4.2	1.8	2.0	7.3

【誤答例】

(1)　立式が「行ベクトル×行列」となっており，計算できていない。

　立式が「列ベクトル×行列」となっており，計算できていない。

　立式が「行列×行ベクトル」となっており，計算できていない。

(2)　立式が「行ベクトル×行列」となっており，計算できていない。

　立式が「列ベクトル×行列」となっており，計算できていない。

　(1) の a または b の値が間違えている。

(3)　立式が「行ベクトル×行列」となっており，計算できていない。

　立式が「列ベクトル×行列」となっており，計算できていない。

　$|\overrightarrow{QQ'}|^2$ を展開し，4次式の最小値を求めようとしている。

　(1) の a または b の値が間違えている。

$\boxed{8}$　関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=\int_1^x \log t\,dt$$

$$g(x)=\int_1^x te^{t-1}dt$$

で定める。ただし，$f(x)$ は $x>0$ の範囲で考える。

(1)　$f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

(2)　$x>0$ のとき，$g(x)>g(-x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　実数 a，b が $0<a<b$ と $f(a)=f(b)$ を満たすとき，次の(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)　が成り立つことを示せ。

(ⅰ) $a<1<b$

(ⅱ) $g(\log a)=g(\log b)$

(ⅲ) $ab<1$

問題番号	(1)	(2)	(3ⅰ)	(3ⅱ)	(3ⅲ)	合計
得点率	85.9	28.8	28.8	5.1	0.0	29.7
標準偏差	1.0	1.8	1.8	0.9	0.0	3.6

【誤答例】

(1)　$f(x)$ の計算が間違えている。

　$g(x)$ の計算が間違えている。

(2)　(1) で $g(x)$ が間違えている。

　$g(x)$ の増減を調べて終わっている。

　$g(x)$ と $g(-x)$ の増減を調べて，グラフで比較しようとしている。

　$G(x)=g(x)-g(-x)$ としているが，微分が間違えている。

(3ⅰ)(1) で $f(x)$ が間違えている。

　平均値の定理を利用しているが，$c=1$ が導けていない。

(3ⅱ)証明になっていない。

$\boxed{9}$　(医学部希望者専用問題)

　原点を O とする。座標空間内に 3 点A，B，C があり，次の条件①，②，③，④ を満たすとする。

①　A は xy 平面上の点で OA$=1$

②　B，C は yz 平面上の点で，y 軸に関して対称である。

③　△OAB は正三角形である。

④　A，B，C は y 軸上にない。

(1)　B の y 座標を t とするとき，t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　四面体 OABC の表面積の最大値を求めよ。

(3)　表面積が最大となる四面体 OABC を x 軸，y 軸，z 軸の周りに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x，V_y，V_z とするとき，V_x，V_y，V_z を求めよ。

$\boxed{10}$　(医学部希望者専用問題)

　1 から 40 までの番号をつけた 40 枚のカードが 2 組ある。これら 80 枚のカ　ードを袋に入れてよくかき混ぜ，同時に 3 枚を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　3 つの番号がすべて 3 の倍数である確率

(2)　3 つの番号の積が 3 の倍数である確率

(3)　3 つの番号の和が 3 の倍数である確率

(4)　3 つの番号の積が 27 の倍数である確率

＜工学部後期＞

1　次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1)　1 枚の硬貨を 8 回投げるとき，表の出る回数が裏の出る回数の 2 倍以下になる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　整式で表された関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が恒等式

$$x^{13}f(x^{10})f'(x^{11})=f(x^{11})f'(x^{12})$$

を満たすとき，$f(x)$ は定数または $\boxed{\text{イ}}$ 次式である。

(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+4x^2}=\boxed{\text{ウ}}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(x+\sqrt{1+x^2})-\log x\}=\boxed{\text{エ}}$

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	35.1	29.7	18.9	54.1	34.5
標準偏差	2.4	2.3	2.0	2.5	4.8

【誤答例】

(1)　考えられる場合が不十分である。

(2)　$f(x)$ を2次式として考えている。

(3)　$x=\dfrac{1}{2}\tan\theta$ と置換し，終わっている。

　置換をした際に，範囲が正しく変えられていない。

(4)　$\log\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$ と変形し，終わっている。

　$\log(x+\sqrt{1+x^2})=\log x+\log\sqrt{1+x^2}$ となっている。

2　次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ はどちらも零ベクトルでないとする。$|\vec{b}-t\vec{a}|$ が最小となる実数 t の値を t_0 とするとき，

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-t_0\vec{a})=0$$

が成り立つことを示せ。

(2)　楕円

$$9x^2+y^2+18kx-2(k+2)y-16k-9=0$$

の長軸の長さと短軸の長さの積を最小にする実数 k の値を求めよ。

(3)　x，y を整数とする。$7x+5y$ が 13 で割り切れるとき，$3x+4y$ も 13 で割りきれることを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	18.5	27.8	28.2	25.1
標準偏差	2.3	2.3	2.3	5.2

【誤答例】

(1)　$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}$ となっている。

　仮定と結論が読み取れていない。

(2)　長軸と短軸が正しく表せていない。

　2次式の最小値を求める際に，平方完成を間違えている。

(3)　$3x+4y=13\times\dfrac{3k+y}{7}$ と表せているが，その先が記述できない。

3　a を実数，k を整数とし，

$$A=\begin{pmatrix}k-a & a(k-a)-1\\ 1 & a\end{pmatrix}$$

とする。また，E を 2 次の単位行列とする。

(1)　$k=0$ のとき，$A^4=E$ を示せ。

(2)　n を自然数とするとき，$A^n=\alpha_nA+\beta_nE$ となる整数 α_n，β_n が存在することを数学的帰納法により示せ。

(3)　$k=2$ のとき，$A^n=E$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	93.3	20.4	0.0	31.0
標準偏差	1.3	2.1	0.0	2.8

【誤答例】

(1)　A^2 の計算が間違えている。

(2)　形式的に「$n=1$ のとき，条件をみたす」と書かれている。

　α_{n+1}，β_{n+1} が存在するかどうかが記述されていない。

(3)　推測のみで終わっている。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin x-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\cos x$$

で定める。

(1) 関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\left(1+\frac{x^2}{3}\right)\sin x-x\cos x$$

で定める。

(i) $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$g(x)>0$ が成り立つことを示せ。

(ii) $f'(x)=xg(x)$ を示せ。

(2) $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)>0$ が成り立つことを示せ。

(3) 半径1の円に内接する正 n 角形の周の長さを L_n，面積をS_n とするとき，次の不等式を示せ。

$$\frac{L_n^2}{S_n}>4\pi+\frac{4\pi^3}{3n^2}$$

ただし，n は3以上の自然数とする。

問題番号	(1 i)	(1 ii)	(2)	(3)	合計
得点率	37.3	47.3	31.5	2.7	30.3
標準偏差	2.2	2.0	1.4	0.6	5.1

【誤答例】

(1 i) $g'(x)$ を求めて終わっている。

$g(x)$ を合成して答えを出そうとしているが，条件が表せない。

$g(0)$ の値を求めていない。

(1 ii) $f'(x)$ が間違えている。

(2) $f(0)$ の値を求めていない。

$f(x)$ の第2次導関数を求めて証明しようとしているが，第2次導関数の正負があいまい。

(3) S_n が1つの二等辺三角形の面積になっている。

L_n，S_n はできているが，証明はできていない。

$\boxed{5}$ 原点をOとする座標空間内に4点A(2，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，1)およびT(0，0，t)($t>1$)がある。$0<s<1$ に対し，線分OT，AT，BT，CT を $s:(1-s)$ の日に内分する点をそれぞれO'，A'，B'，C'とする。OA，OB，OC を3辺とする直方体を P とし，O'A'，O'B'，O' C'を3辺とする直方体を P' とする。さらに，P' の体積を U とし，P と P' が重なった部分を P' から除いてできる立体の体積を V とする。ただし，P と P' が重ならないときは，$V=U$ とする。

(1) U を求めよ。

(2) $V=U$ となる s の範囲を求めよ。

(3) V を求めよ。

(4) s が $0<s<1$ の範囲を動くとき，V の最大値とそのときの s の値を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	11.7	1.8	2.7	0.0	4.5
標準偏差	1.7	0.3	0.8	0.0	2.5

【誤答例】

(1) O'，A'，B'，C' の座標が求められていない。

(2) $0<s<1$ を考慮していない。

4 おわりに

前期日程の難易度は例年通りであったと感じている。文理共通問題の$\boxed{4}$については，すべて理型生徒の方がよくできていた。しかしながら，$\boxed{1}$，$\boxed{5}$で共通して出題された三角方程式と剰余の定理の問題については，文系生徒の得点率がわずかながら理型生徒を上回る結果となった。三角方程式については理型生徒の問題の方が右辺の分子と分母が大きかったことが計算ミスにつながった。剰余の定理については文型生徒の丁寧さにより得点率が高くなった。また，工学部後期の難易度は生徒達にとっては大変高かったようである。特に最後の空間図形については，ほとんどの生徒が図もかけず，白紙の状態であった。理型生徒においても，空間図形についてはイメージしづらいものであることがはっきりと表れた結果であったといえる。

説明会において，平野教授から出題や採点のポイントを話していただいた。ますは出題時に気を付けることは次の4点である。

①基本的なことがらが理解できているか。

②基礎的な計算力を身に付けているか。

③応用力を身に付けているか。

④論理的な考え方を身に付けているか。

さらに，採点時には「『一歩ずつ論理立てて解答しているか』，『しっかり説明できているか』などを見ている。答えが合っていても公式だけを使い解答が大きく飛躍している場合は大幅な減点としている。しかし，答え自体が間違っていても，考え方がよく，筋道が立っている場合はある程度点を与えている。」ということである。また，説明会の中で，「入試問題は，その年度に受験する生徒に向けて出題しているだけでなく，将来の受験生にもこのような力をつけてほしいというメッセージも込めている。」と言われていた。

実際のところ，この問題を生徒に解いてもらったときには大学入試センター試験の演習が行われていた。テクニックとスピードが必要とされる大学入試センター試験の対策を行っていたため，思考力が問われる2次試験の問題に対応できなかった生徒も多くいたようである。大学入試センター試験後には1問にじっくり時間をかけて解くなど，思考力を高めるトレーニングが必要であると改めて感じた。