国公立大学入試問題の研究

−イメージする力が問われる問題の研究−

愛媛県立松山東高等学校　　高田　潤哉

1　はじめに

生徒は高校数学を学ぶにあたり，教科書，副教材，参考書等で基礎事項や基礎計算力，定番となる重要基礎問題の徹底を図った後に，より発展的な内容へ思考を深めていく。しかしながら発展的な内容への過程の中でいつの間にか模範解答を意識しすぎて，型にはまった問題を型にはまった解答方法で解くというだけの状況に陥っていないだろうか。

問題を解くにあたり、図やグラフをイメージすることは大切である。受験生の力を図るための一つの方法としても，イメージする力があるかどうかで解答の明暗が分かれる問題は有効であろう。また、図形的な側面から問題を考えるには，高校で習う数学の本質的な理解が必須である。数学を活用する力が重要視される現在において，イメージすることを意識して，近年の大学入試問題について考察した。今回はそのごく一部ではあるが，その考え方に触れてほしい。

2　大学入試問題の考察

まずは以下の問題を見てもらいたい。昨年度入試問題である。

<2021 大阪大学　理系前期>
座表平面上において，t を媒介変数として
$$x=e^t\cos t+e^{\pi},\quad y=e^t\sin t\qquad (0\leqq t\leqq\pi)$$
で表される曲線を C とする。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

媒介変数表示で表された曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求める典型的な微積分の問題であり，増減表，グラフから面積の式を立てて計算する。

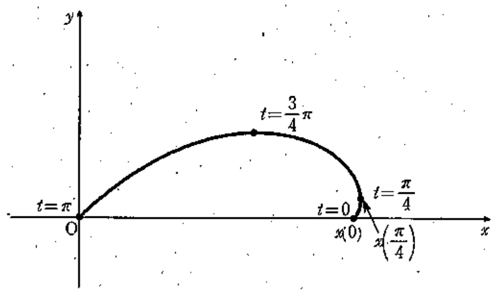
【解答分析①】定番の解法

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)=\sqrt{2}\,e^t\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)=\sqrt{2}\,e^t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

増減表は以下のようになる。

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	π
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	−	−	
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	0	−	
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$		↗	↑	↖	←	↙	

また，$y(0)=y(\pi)=0$，$x(\pi)=0$ であるから，
グラフは以下のようになる。



ここで，求める面積を S として

$$y=\begin{cases} y_1 & \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}\right)\\ y_2 & \left(\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\pi\right)\end{cases}$$

とすると

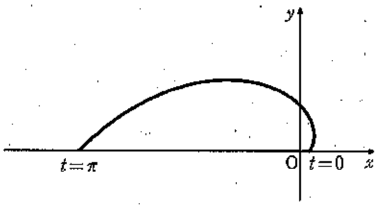
$$S=\int_0^{x\left(\frac{\pi}{4}\right)}y_2\,dx-\int_{x(0)}^{x\left(\frac{\pi}{4}\right)}y_1\,dx$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}}y\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=-\int_0^{\pi}y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=-\int_0^{\pi}e^t\sin t\cdot e^t(\cos t-\sin t)dt$$
$$=-\int_0^{\pi}e^{2t}(\sin t\cos t-\sin^2 t)dt$$
$$=-\int_0^{\pi}e^{2t}\left(\frac{\sin 2t}{2}-\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$$

これが最終問題であったため，時間的に厳しい受験生もいたのではないかと思う。

これを視点を変えて極座標で考えると以下のようになる。

【解答分析②】極座標の解法（平行移動がポイント）

曲線 C を x 軸方向に $-e^{\pi}$ 平行移動したものを考える。これを C' とすると，曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積は曲線 C' と x 軸で囲まれた部分の面積は等しい。
このとき，
C': $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ であるから，
C' の極方程式は，$r=e^t$　$(0\leqq t\leqq\pi)$ である。



よって，

$$S=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2dt$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^{2t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4}(e^{2t}-1)$$

これを公式として使ってよいのかという疑問はあるかもしれないが、このように少し見方を変えることが大切なのである。

次はベクトルの問題である。

> <2020 一橋大学　前期>
> 半径 1 の円周上に 3 点 A，B，C がある。内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値と最小値を求めよ。

最大値はすぐに求めることができる。問題は最小値である。内積を設定し，後は主に計算でその最大値・最小値を求めていくのが解答 ①，②であり，解答③と比べてみてほしい。

【解答分析①】ベクトルを利用

3 点 A，B，C が通る半径 1 の円の中心を O とすると

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$$

このとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}+1$$

ここで，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$ とすると

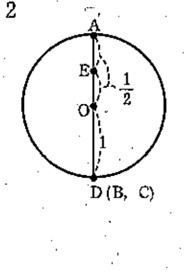
$$|\overrightarrow{OD}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right|^2$$
$$=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}$$

よって，　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2|\overrightarrow{OD}|^2-1$ であるから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2|\overrightarrow{OD}|^2-1-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+1$$
$$=2\left|\overrightarrow{OD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=2\left|\overrightarrow{OD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|^2-\frac{1}{2}$$

更に，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ とすると

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}|^2-\frac{1}{2}$$
$$=2|\overrightarrow{ED}|^2-\frac{1}{2}$$



ここで，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$ すなわち，$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=-\overrightarrow{OA}$ のとき，

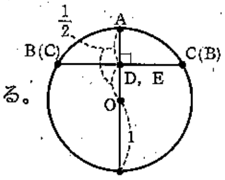
$|\overrightarrow{ED}|$ は最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

また，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$ すなわち $\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ のとき，

$|\overrightarrow{ED}|$ は最小値 0 をとる。よって，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の

最大値は　$2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=4$

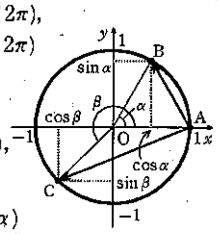
最小値は　$2\cdot 0^2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$　である。



【解答分析②】座標を利用

xy 平面において，点 A の座標を (1, 0)，
点 B の座標を $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)(0\leqq\alpha<2\pi)$，
点 C の座標を $(\cos\beta,\ \sin\beta)(0\leqq\beta<2\pi)$
としても一般性は失われない。
このとき，

$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，
$\overrightarrow{OC}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$ であるから
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha-1,\ \sin\alpha)$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(\cos\beta-1,\ \sin\beta)$



よって，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\cos\alpha-1)\times(\cos\beta-1)+\sin\alpha\times\sin\beta$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta+1+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha-\cos\beta+1$$
$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\alpha+1$$

ここで，$0\leqq\beta<2\pi$ であるから，$-\dfrac{\alpha}{2}\leqq\beta-\dfrac{\alpha}{2}<2\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ より

$$-1\leqq\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\leqq1$$

また，$0\leqq\alpha<2\pi$ より　$0\leqq\sin\dfrac{\alpha}{2}\leqq1$　……①

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\geqq-2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$

　　　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqq2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$

$f(\alpha)=-2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$，$g(\alpha)=2\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+1$ とすると

$$f(\alpha)=-2\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+1$$
$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$
$$g(\alpha)=2\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+1$$
$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

更に，$0\leqq\alpha<2\pi$，$0\leqq\beta<2\pi$ より　$-\pi<\beta-\dfrac{\alpha}{2}<2\pi$

① の範囲で，$f(\alpha)$ は $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

ゆえに，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ は

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2},\ \sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=-1$$

すなわち　$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi\right),\ \left(\frac{5}{3}\pi,\ \frac{\pi}{3}\right)$のとき，

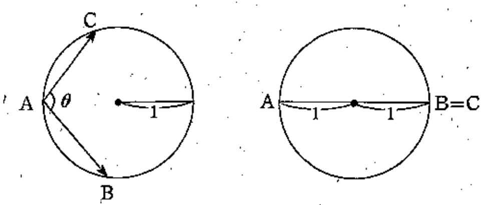
最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。

また，①の範囲で，$g(\alpha)$ は $\sin\frac{\alpha}{2}=1$ のとき最大値 4 をとる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\sin\frac{\alpha}{2}=1,\ \sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=1$

すなわち $(\alpha,\ \beta)=(\pi,\ \pi)$ のとき，最大値 4 をとる。

【解答分析③】図形的に考える。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とすると，

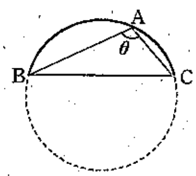
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta\cdots①$$

AB，AC の長さは，直径以下であるから，$\mathrm{AB}\leqq 2$，$\mathrm{AC}\leqq 2$
また，$\cos\theta\leqq 1$ である。AB が直径で，B と C が一致するとき，これらの等号がすべて成り立つので，①の最大値は，
$2\times 2\times 1=4$ である。

次に，最小値は，$\cos\theta<0$ として考えてよいので，θ を固定すると，①が最小となるのは

AB × AC が最大となるとき …②　である。

$\cos\theta<0$ であるから，A は右図のように弧 BC 上を動く。（両端を含む短い方）



$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta$ であるから，

θが固定されているとき，②となるのは，△ABCの面積が最大となるときである。

つまり，$\overset{\frown}{\mathrm{BA}}=\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ のときで，

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi-\theta}{2}$ となるときである。

正弦定理により，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}=2$

よって，$\mathrm{AB}=2\sin\frac{\pi-\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}$

AB=ACと①から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=4\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta\\&=4\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}\cos\theta\\&=2(\cos^2\theta+\cos\theta)\\&=2\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。

ベクトル，座標利用ともに押さえておきたい解答方法である。

解答分析③は図形的な視点から，最小となるための条件を導き，計算　量を抑えている。なかなかこのように考えることは難しいと思うものの，図形的に考えることの有効性を感じずにはいられない。

次は複素数平面の問題である。複素数の計算が複素数平面上のどのような動きにつながっているのかを理解できているか。さらに，複素数平面上に現れる図形的な問題把握能力が問われる。

<2020 京都大学　理系前期>
a，b は実数で，$a>0$ とする。z に関する方程式
$$z^3+3az^2+bz+1=0\quad\cdots\cdots①$$
は 3 つの相異なる解をもち，それらは複素数平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{3}\,a$ の正三角形の頂点となっているとする。
このとき，a，b と①の 3 つの解を求めよ。

【解答分析①】

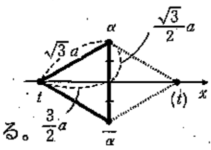
3 次方程式①の 3 つの解が，複素数平面上で正三角形の頂点であるから，①は少なくとも 1 つの虚数解をもつ。その虚数解を α とすると，①は実数係数の方程式であるから，残りの 2 つの解は，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ と実数 t である。このとき，α の虚部を正とする。

解と係数の関係により
$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+t=-3a & \cdots\cdots②\\ \alpha t+\overline{\alpha}t+\alpha\overline{\alpha}=b & \cdots\cdots③\\ \alpha\overline{\alpha}t=-1 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

これらの 3 つの解が，複素数平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{3}\,a$ の正三角形の頂点となることから

$$|\alpha-\overline{\alpha}|=|\alpha-t|=|\overline{\alpha}-t|=\sqrt{3}\,a$$

よって，3 点の位置は右の図のようになる。



(i)　$\alpha=t+\frac{3}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}ai$ のとき

②に代入して　$2t+3a+t=-3a$
$$t=-2a$$

よって　$\alpha=\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{3}\,i)$

④に代入して　$\frac{a^2}{4}(1+3)\cdot(-2a)=-1$

整理して　$a^3=\frac{1}{2}$

よって，$a>0$ から　$a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$t=-\sqrt[3]{4}$

③から　$b=(\alpha+\overline{\alpha})t+\alpha\overline{\alpha}$
$$=(-a)\cdot(-2a)+\frac{a^2}{4}(1+3)=3a^2=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

したがって，3 次方程式①の 3 つの解は

$$-\sqrt[3]{4},\ \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(-1\pm\sqrt{3}\,i)$$

(ii)　$\alpha=t-\frac{3}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}ai$ のとき

②に代入して　$2t-3a+t=-3a$

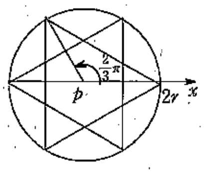
$$t=0$$

④に代入すると $0=1$ となり，不適である。

したがって，(i), (ii) から　　$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

①の３つの解は　　$-\sqrt[3]{4}$，$\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(-1\pm\sqrt{3}\,i)$

【解答分析②】正三角形の重心を基準にする。



実数係数の３次方程式は実数解を少なくとも１つもつ。その３つの解が複素数平面上で正三角形をなす場合，他の２つの解は共役な複素数である。その三角形の重心は実軸上にある。その重心が原点にの場合には，実軸上の点を $2r$ とすると，他の２点はこれを $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ 回転し

$$2r\left(\cos\frac{2}{3}\pi\pm i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=r(-1\pm\sqrt{3}\,i)$$

とおける。

よって，重心を p とすると，①の３つの解は，

$$p+2r,\quad p-r+\sqrt{3}\,ri,\quad p-r-\sqrt{3}\,ri$$

とおけるので，解と係数の関係より

$3p=-3a$ ……………………………… ②

$(p+2r)(2p-2r)+(p-r)^2+3r^2=b$ ……… ③

$(p+2r)\{(p-r)^2+3r^2\}=-1$ ……………… ④

となる。また，この正三角形の１辺の長さが $\sqrt{3}\,a$ であるから

$|2\sqrt{3}\,r|=\sqrt{3}\,a$ ……………………………… ⑤

②，⑤より $p=-a$，$r=\pm\dfrac{a}{2}$ である。④より

$p+2r\neq 0$ であるから，$r=\dfrac{a}{2}$ は不適である。

$p=-a$，$r=-\dfrac{a}{2}$ を④に代入して

$$(-2a)\left\{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2\right\}=-1$$

$2a^3=1$ より，$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

これは $a>0$ を満たす。③に代入して

$$b=(-2a)(-a)+a^2=3a^2=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

したがって①の３つの解は

$$-2a,\quad -\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

すなわち

$$-\sqrt[3]{4},\quad -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1\pm\sqrt{3}\,i)$$

その年度の数字を使った問題もよく見る問題である。

<2021 金沢大学　理系前期>

n を２以上の自然数とし，点Ｏを中心とする半径１の円周上にすべての頂点を持つ正 $2n$ 角形を考える。そのうちの１つの頂点をＡとし，Ａとそれ以外の頂点を結ぶ線分が点Ｏを中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円と共有点をもつような頂点の個数を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

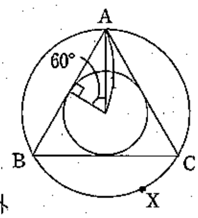
(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　a_{2021} を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$ を示せ。

イメージをどう捉えるのか，次の解答①，②を示す。

【解答分析①】図形的に見る。



Ｏを中心とする半径１の円周上にＢ，Ｃをとり，△ABCが正三角形になるようにすると，△ABCの内接円の半径半径は，図より

$$\mathrm{AO}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

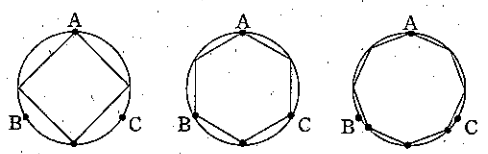
となる。よって，正 $2n$ 角形のＡ以外の頂点Ｘについて，

ＡＸがＯを中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円と共有点をもつ

$\Longleftrightarrow$　ＸがＢＣ（両端を含む短い方）にある

以下，弧は短い方を指すものとする。

(1)

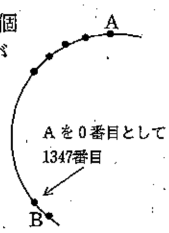


$n=2$　　　$n=3$　　　$n=4$

図より，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=3$

(2)　$n=2021$ のとき，円周上に $2n=4042$ 個の頂点が等間隔に並び，そのうちの１つがＡである。

$4042\div 3=1347.3\cdots$ なので，弧ＡＢ上に正 $2n$ 角形の頂点はＡを除いて 1347 個ある。弧ACについても同じだから，弧ＢＣ（両端を含む）にある頂点の個数 a_{2021} は



$$a_{2021}=4042-1347\times 2-1=1347$$

(3)　弧ＡＢ（両端を除く）にある頂点の個数を b_n とする。

(2)と同様に考えると，

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2n}{3}\text{ の整数部分} & (n\text{ が3の倍数でないとき})\\[2mm] \dfrac{2n}{3}-1 & (n\text{ が3の倍数のとき})\end{cases}$$

であるから，いずれの場合も

$$\frac{2n}{3}-1\leqq b_n\leqq\frac{2n}{3}$$

が成り立つ。これと $a_n=2n-2b_n-1$ より

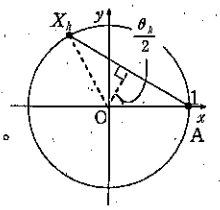
$$\frac{2n}{3}-1\leqq a_n\leqq\frac{2n}{3}+1$$

よって，$\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{a_n}{n}\leqq\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{n}$

$n\to\infty$ のとき，左辺，右辺とも $\dfrac{2}{3}$ に収束するので，

はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$ が成り立つ。

【解答分析②】座標を設定し，数式主体で解く。



A を $(1,\ 0)$，$\theta_k=\dfrac{k}{n}\pi$ として

$X_k(\cos\theta_k,\ \sin\theta_k)$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1)$ とおく。

O と AX_k の距離は $\left|\cos\dfrac{\theta_k}{2}\right|$

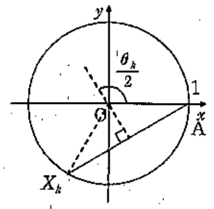
であるから，a_n は

$\left|\cos\dfrac{\theta_k}{2}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$，$0<\dfrac{\theta_k}{2}<\pi$

を満たす k の個数，k の条件は

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\theta_k}{2}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$，すなわち

$\dfrac{2}{3}n\leqq k\leqq\dfrac{4}{3}n$ $\cdots$ ①



(1) $n=2$ のとき，

①は $\dfrac{4}{3}\leqq k\leqq\dfrac{8}{3}$ だから，$k=2$　よって，$a_2=1$

$n=3$ のとき，

①は $2\leqq k\leqq 4$ で $a_3=3$

$n=4$ のとき，

①は $\dfrac{8}{3}\leqq k\leqq\dfrac{16}{3}$ で $k=3,\ 4,\ 5$ となるので，$a_4=3$

(2) (1) と同様に，$n=2021$ のとき，

① を満たす整数 k の値の範囲は，

$1348\leqq k\leqq 2694$ で，$a_{2021}=1347$

(3) ① を満たす整数 k の個数 a_k は

(① の区間の幅)$-1\leqq a_n\leqq$(① の区間の幅)$+1$

を満たす。よって，

$$\frac{2n}{3}-1\leqq a_n\leqq\frac{2n}{3}+1$$

よって，$\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{a_n}{n}\leqq\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{n}$

$n\to\infty$ のとき，左辺，右辺とも $\dfrac{2}{3}$ に収束するので，

はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$ が成り立つ。

図形的に捉える方法，座標で捉える方法ともに解法としてもっておきたい。解答の方向性は見えているとき，どう解答を作っていけばよいのか参考になる問題である。

最後に 4 次方程式に関する解についての問題である。

<2020 京都工芸繊維大学　後期>

x の多項式 $P(x)$ は，係数が実数の 2 次式であり，x^2 の係数は 1 であるとする。さらに，4 次方程式

$$\{P(x)\}^2+12P(x)+35=0$$

の解が $x=p,\ p+1,\ \alpha,\ \overline{\alpha}$ であるとする。ただし，p は実数，α は複素数，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数であり，α は $|\alpha|=\dfrac{5}{2}$ を満たし，α の実部及び虚部はともに正であるとする。このとき，p および α の値を求めよ。

一見この問題でどのようなイメージが必要なのかと思うかもしれない。この問題では p と $p+1$ を解に持つ 2 次方程式と α と $\overline{\alpha}$ を解に持つ 2 次方程式を考えるのはよいのだが，この後どう考えるかがポイントになっている。

ポイント

$\{P(x)\}^2+12P(x)+35=0$

を因数分解して

$\{P(x)+5\}\{P(x)+7\}=0$

とし，

$y=P(x)+5$ …①

$y=P(x)+7$ …②

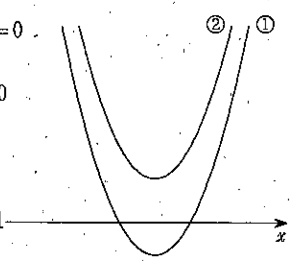
とすると，x^2 の係数は 1

だから

$P(x)+5<P(x)+7$

よって，

p と $p+1$ は $P(x)+5=0$ の解，α と $\overline{\alpha}$ は $P(x)+7=0$ の解となるのである。



【解答分析】

(1) $\{P(x)\}^2+12P(x)+35=0$

$\{P(x)+5\}\{P(x)+7\}=0$

この 4 次方程式が実数解 p，$p+1$ と虚数解 α，$\overline{\alpha}$ をもち，x^2 の係数 1 の $P(x)$ について，$P(x)+5<P(x)+7$ が成り立つから，

p と $p+1$ は $P(x)+5=0$ の解，

α と $\overline{\alpha}$ は $P(x)+7=0$ の解

となる。

$P(x)+5=(x-p)(x-p-1)$ より

$P(x)=x^2-(2p+1)x+p^2+p-5$

また，

$P(x)+7=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$，$|\alpha|=\dfrac{5}{2}$ より

$$\begin{aligned}P(x)&=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+|\alpha|^2-7\\&=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって，

$x^2-(2p+1)x+p^2+p-5=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x-\frac{3}{4}$ より

$$\begin{cases} 2p+1=\alpha+\overline{\alpha} & \cdots① \\ p^2+p-5=-\frac{3}{4} & \cdots② \end{cases}$$

②より，$p=\frac{-1\pm3\sqrt{2}}{2}$

α の実部は正であるから，$\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}>0$　となり，①より

$p+\frac{1}{2}>0$ を満たすから，

$p=\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}$

また，$\alpha+\overline{\alpha}=3\sqrt{2}$，$|\alpha|^2=\frac{25}{4}$ であるから

$\alpha(3\sqrt{2}-\alpha)=\frac{25}{4}$

$\alpha^2-3\sqrt{2}\alpha+\frac{25}{4}=0$

よって，$\alpha=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{7}i}{2}$

α の虚部は正であるから

$\alpha=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{7}i}{2}$

因数分解してでてきた2つの2次式に大小がつくことから，グラフをイメージして，解答の道筋を立てている。思考を柔軟にして，これまでの基本的な知識を基に，しっかりと考える力が備わっているのかが問われている。

3　終わりに

今回は大学入試問題を少し視点を変えて考えてみた。内容はその一部である。今回のように少し視点を変えて，図形的な側面やグラフのイメージをもって問題を考えることで，計算力をそこまで使うことなく、正解に辿り着くことができるのも事実である。難関大学と言われる大学を受験する生徒は定番，定石，頻出といった問題やその大学の過去問には精通しているはずである。そこで受験生の実力を図る問題として，こういったイメージに基づいた”気付き”の大切さを意識させておきたい。

<参考資料>

2023年受験用　全国大学入試問題正解　数学　国公立大　編
2022年受験用　全国大学入試問題正解　数学　国公立大　編
2021年受験用　全国大学入試問題正解　数学　国公立大　編