令和４年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立西条高等学校　吉村　新平

1　はじめに

今年度は５月21日(土)にオンラインで愛媛大学理学部平野幹教授による令和４年度愛媛大学入試問題の解説があった。教授のコメントを参考に問題を分析していきたい。

2　出題の傾向

(1)　問題数および試験時間

昨年度より理系，文系ともに３題ずつの問題構成である。試験時間は教育学部，農学部，工学部文理型は100分，理学部，工学部理型，医学部医学科は120分である。後期は小問１題，記述２題を120分で解答する形であった。

前期，後期ともに，３題の構成は，①基礎的な計算問題，②論証力を見る問題，③応用力を測る問題という構成にしているとのことで，後述する評価のポイントをまんべんなく評価する意図がある。

(2)　出題内容

教育学部（「数Ⅰ，数Ⅱ，数A，数B」受験者）
農学部，工学部文理型

- ［1］　計算問題（数学A・Ⅱ・B）
- ［2］　論証問題（数学Ⅰ・Ⅱ・B）
- ［3］　微分法・積分法（数学Ⅱ）

教育学部（「数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B」受験者）

- ［2］　論証問題（数学Ⅰ・Ⅱ・B）
- ［3］　微分法・積分法（数学Ⅱ）
- ［4］　計算問題（穴埋め）（数学B・Ⅲ）

理学部，工学部理型，医学部医学科

- ［4］　計算問題（穴埋め）（数学B・Ⅲ）
- ［5］　論証問題（数学Ⅰ・Ⅱ・B）
- ［6］　確率，ベクトル，極限，微分法・積分法（数学A・Ⅱ・B・Ⅲ）

後期

- ［1］　計算問題（穴埋め）（数学A・B・Ⅲ）
- ［2］　論証問題（数学Ⅱ・Ⅲ）
- ［3］　三角関数，微分（数学Ⅱ）

(3)　出題者の意図

評価のポイント

1. 基本的な事項が理解できているか。
2. 基本的な計算が身に付いているか。
3. 応用力を身に付けているか。
4. 論理的に考察し，表現できるか。

の４つの観点をまんべんなく評価するという意図で問題が作成されている。

令和２年度までと比べて問題数が減ったが，試験時間は変わっていない。考える時間がたっぷりあるように配慮し，地に足の着いた数学力を評価したいとの意図があるそうだ。

複数の解法が考えられる問題も多く，普段からより良い解法がないか考察するようにして欲しいと言われていた。問題についてよく考察することで，見通しをもって計算することができ，ミスが減らせるともおっしゃっていた。

3　問題分析

<前期>

［1］　計算問題（数学A・Ⅱ・B）

以下の問いに答えよ。

(1)　tを実数とする。原点を中心とする半径１の円と，２点A$(-1,\ 0)$，B$(0,\ t)$を通る直線との２つの交点のうち，Aでない交点をCとする。Cの座標をtを用いて表せ。

(2)　２次方程式$x^2-3x+4=0$の２つの解をα，βとするとき，$\alpha^3+\beta^3$の値を求めよ。

(3)　$m^2-mn-2n^2=22$を満たす自然数の組$(m,\ n)$をすべて求めよ。

(4)　赤玉４個，白玉３個，黒玉２個が入っている袋から，３個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉の色がすべて異なる確率を求めよ。

(5)　次の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

【考察】

どの問題も教科書の練習問題で扱われるような基本的な問題である。確実に正解して欲しいところ。

(1)は数学Ⅲで円の媒介変数表示として教科書に紹介されいる。昨年度も文系の計算問題でド・モアブルの定理が利用できる問題が出題されている。数学Ⅲの知識がなくても解ける問題ではあるが，数学Ⅲを学んでおくことは文系入試でも有利になるといえそうである。

(2)は解と係数の関係と対称式を用いたオーソドックスな出題である。

(3)もよくある整数の不定方程式の問題である。積の形にすることで考えやすくなることを普段から意識させておきたい。

(4)では，実際の受験生の解答において，組合せと順列の混同が多いとのことであった。普段の生徒からの質問でも，順列と組合せのどちらを使ったら良いか問われることが多い。問題のパターンで判断しようとする生徒がこの間違いに陥る傾向にある。な

ぜ順列（組合せ）を使うのかを考えさせるようにしたい。

(5) も教科書の練習問題レベルの基本問題である。解法を忘れても，具体的に書き並べてみることで正解にたどり着けそうであるが，公式に頼る生徒は書き並べてみるということをしない可能性が高い。自分で実験してみるという態度を身に付けさせておきたい。

2　論証問題（数学Ⅱ・B）

以下の問いに答えよ。

(1)　n を自然数とするとき，

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2={}_{2n+1}\mathrm{C}_3$$

が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

(2)　θ が $\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$ を満たすとき

$$0<\frac{\cos\theta+1}{\sin\frac{\theta}{2}+1}\leqq1$$

が成り立つことを証明せよ。

(3)　関数 $y=|x-1|-2|x+1|$ $(-4\leqq x\leqq2)$ の最大値，最小値を求めよ。

【考察】

平野教授は，「形式的な解答」「つじつま合わせ」にならないようにしてほしいとおっしゃっていた。特に (1) の数学的帰納法の記述では，「$n=k$ のときに成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき

$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+\{2(k+1)-1\}^2={}_{2(k+1)+1}\mathrm{C}_3$

が成り立つ」のように，なぜ成り立つのかを説明せずに「成り立つはずだ」という思い込みのみで解答している受験生が見られたとのことである。生徒自身が「帰納法で確かに証明できている」と納得できているかどうかが大事であるとおっしゃっていた。

(2) では分母が正であることから，辺々に分母の式をかけて分母を払うよう指導するのが一般的であると思われる。しかし，

$$\cos\theta+1=2\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

と変形できることを活用するなど、様々な別解が存在する問題であり，パターンにはまらない柔軟な思考力を鍛えられる問題である。

(3) では，定義域の両端と $x=\pm1$ の4か所の値だけ計算して比較すれば最大値と最小値が判明するが，そのような解答には点を与えないとのことであった。場合分けして絶対値を外した後，グラフを用いるなど関数の全体像を把握して最大・最小の判断をさせるようにしたい。

3　微分法・積分法（数学Ⅱ）

n を自然数とし，p を正の実数とする。放物線

$$C: y=-x^2+4$$

上に点 $\mathrm{P}(p,\ -p^2+4)$，$\mathrm{Q}(-p,\ -p^2+4)$ がある。C 上の点Pにおける接線を l_1 とし，点Pと点 $(0,\ -n)$ を通る直線を l_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　l_1 の傾きを p を用いて表せ。

(2)　l_2 の傾きを p，n を用いて表せ。

(3)　l_1 と l_2 が垂直であるとき，p を n を用いて表せ。

(4)　l_1 と l_2 が垂直であるとき，直線PQと C で囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(5)　(4) で求めた S_n について，$S_n\geqq288$ となる n の最小値を求めよ。

【考察】

きちんと図がかければ難しくない問題であると思われるが，普段の授業や考査においてもグラフが正しくかけない生徒も多い。図をかいて考えるクセをつけさせたい。

(4)，(5) の S_n の計算では，p を用いて計算し，最後に (3) で求めた $p=\sqrt{n+\frac{7}{2}}$ を代入する方が計算しやすい。そういった計算の見通しをもたせることも大切である。

4　計算問題（穴埋め）（数学B・Ⅲ）

次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　$f(x)=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ のとき，$f'(0)=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+4}-b}{x}=1$ が成り立つとき，$a=\boxed{\text{イ}}$，$b=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　p，q を正の実数とし，空間内の4点 $\mathrm{A}(p,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(p,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-q,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。△ABCが正三角形で，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直であるとき，$p=\boxed{\text{エ}}$，$q=\boxed{\text{オ}}$ である。

(4)　z，w を $|z|=2$，$|w|=5$ を満たす複素数とする。$z\overline{w}$ の実部が3であるとき，$|z-w|=\boxed{\text{カ}}$ である。

(5)　関数 $f(x)$ が $f(x)=x+\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt$ を満たすとき，$f(0)=\boxed{\text{キ}}$ である。

(6)　媒介変数 $t>0$ を用いて $x=t+e^t$，$y=2+\log t$ と表された曲線の $t=1$ に対応する点における接線の方程式は，$y=\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}$ である。

【考察】

知識理解について共通テストを補う目的で，共通テストで問われない数学Ⅲと，問われることの少ない空間ベクトルの内容を出題されたそうである。また，(4)複素数平面や(5)媒介変数表示は大学でよく使われる知識であるため，きちんと使えるようにしておいて欲しいとのこと。今後も出題される可能性は高そうである。

基本的な計算問題なので，どれも正解して欲しいレベルではあるが、平野教授は「受験生にとって一番大変だったのがこの計算問題かもしれない。意外とできていない。」とおっしゃっていた。

(3)ベクトルの問題では、図をかいてみることでいろいろなことに気付けるとのアドバイスをいただいた。例えば，3点A，B，Cはxy平面上にあり，Dはz軸上にあることから，$\mathrm{AD}\perp\mathrm{BC} \Leftrightarrow \mathrm{AO}\perp\mathrm{BC}$であることや，それに加えて線分ABが$x$軸に垂直であることから，原点Oが△ABCの垂心になることなどである。これらを用いてより簡潔な解法を導くこともできるため，いきなりベクトル計算に取り掛かるのではなく，図をイメージして特徴をつかむことから始めさせたい。

$\boxed{5}$ 論証問題（数学Ⅰ・Ⅱ・B）

以下の問いに答えよ

(1) $\{a_n\}$を初項が6，公差が3の等差数列，$\{b_n\}$を初項が3，公比が2の等比数列とする。

(i) a_2，a_3，b_2，b_3を求めよ。

(ii) すべての$n \geqq 4$について$a_n < b_n$となることを証明せよ。

(2) s，tを実数とする。xについての2次方程式$x^2+sx+t=0$のすべての解の実部が負であるような点(s, t)の領域をst平面に図示せよ。

(3) 関数$y=|x-1|-2|x+1|$ $(-4 \leqq x \leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ。

【考察】

(1)の証明では，数学的帰納法を用いて証明しようとする受験生が多かったが，$\boxed{2}$(1)と同じようにミスが見られたとのことである。この問題では証明方法を指定されていないので，他の証明方法（二項定理の利用など）を普段の指導で考えさせるようにしてもよいのではないかとおっしゃっていた。

(2)は「実部」と書いてあるため虚数解を考えてしまいがちであるが，すべての解が負の実数である場合も見落とさずに考慮しなければいけない。

(3)は文系との共通問題である。

$\boxed{6}$ 確率，ベクトル，極限，微分法・積分法（数学A・Ⅱ・B・Ⅲ）

(1) tは$0<t<1$であるとする。座標平面上を動く点Qを考える。Qは次の規則(*)に従う移動を繰り返す。

Qが点(x, y)にいるとき，

(*) 点$(x+3, y+2)$または点$(x+2, y+5)$のどちらかにそれぞれ確率t，確率$1-t$で移動する。

nを自然数とし，はじめ原点にいたQがn回移動したとき，直線$y=x$上にいる確率をP_nとおく。

(i) $\vec{a}=(3, 2)$，$\vec{b}=(2, 5)$とする。次の条件(#)を満たす自然数の組(l, m)をすべて求めよ。

(#) 原点に関する位置ベクトルが$l\vec{a}+m\vec{b}$となる点が直線$y=x$上にある。

(ii) (i)で求めた(l, m)について，$l+m$のとりうる値の最小値をNとする。このとき，P_1，P_2，…，P_N，P_{N+1}，…，P_{2N}を求めよ。

(iii) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，(ii)で求めたP_Nが最大となるtを求めよ。

(2) xを実数とし，無限等比級数

$$(\Diamond)\quad \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+1)^6}+\cdots+\frac{1}{(x+1)^{2n}}+\cdots$$

を考える。

(i) 無限等比級数(◇)が収束するようなxの値の範囲を求めよ。

(ii) xが(i)で求めた範囲にあるとき，無限等比級数(◇)の和を求めよ。

(iii) (ii)で求めた和を$f(x)$とおく。kを2以上の自然数とするとき，曲線$y=f(x)$と直線$x=1$，$x=k$，およびx軸で囲まれた部分の面積S_kを求めよ。

(iv) (iii)で求めたS_kについて，極限$\lim_{k\to\infty} S_k$を求めよ。

【考察】

複数の分野が融合しており，問題量も多く，難易度高めの問題である。

(1)では図をかいてみると見通しが立ちやすい。自分の手で実験してみることが大切であることを普段の指導で認識させたい。

(2)は基本的な数学Ⅲの問題である。(iii)では面積を求める際に，積分区間内で$f(x)>0$であることを確認していない解答があったとのことである。基本的なことであるが，当たり前のこととして書き漏らしていることが多いのではないだろうか。大学入試でも採点時にチェックされているということで，確認の大切さを生徒に認識してもらいたい。

<後期>

1 計算問題（穴埋め）（数学Ⅱ・B・Ⅲ）

次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) 空間のベクトル $\vec{p}$ が，3つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と実数 x, y, z を用いて $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表されるとする。

$\vec{p}\cdot\vec{a}=4$　　$\vec{p}\cdot\vec{b}=4$　　$\vec{p}\cdot\vec{c}=23$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$　　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$|\vec{a}|=1$　　$|\vec{b}|=2$　　$|\vec{c}|=3$

が成り立つとき，$x=\boxed{ア}$，$y=\boxed{イ}$，$z=\boxed{ウ}$ である。

(2) 関数 $f(x)=\log(x^2+e)$ $(x\geqq 0)$ について，曲線 $y=f(x)$ の変曲点をPとする。このとき，$y=f(x)$ 上の点Pにおける接線の方程式は

$$y=\boxed{エ}x+\boxed{オ}$$

である。

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos 3x\,dx=\boxed{カ}$ である。

(4) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 5}\frac{2e^x}{e^{2x}-1}dx=\boxed{キ}$ である。

(5) 1から7までの数字が書かれたカードがそれぞれ4枚ずつある。この合計28枚のカードから2枚のカードを同時に引くとき，カードに書かれた数の和が3の倍数になる確率は $\boxed{ク}$ である。

(6) 数列 $\{a_n\}$ は公比が r の等比数列で，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=-3$$

を満たすとする。このとき $r=\boxed{ケ}$，$a_1=\boxed{コ}$ である。

【考察】

理系前期と同様，空間ベクトルと数学Ⅲを中心とした内容で，共通テストとの差別化を図っている。

(1)は図がイメージしにくい内容で，平野教授もこの問題は割り切って計算だけでいいかなとおっしゃっていた。

(3)は被積分関数が偶関数であることを利用すると計算しやすい。普段から偶関数・奇関数の性質は活用するように指導しておきたい。

(4)では置換積分の間違い（積分区間や演算子 dx の置き換え忘れ）が多いとのことである。

2 論証問題（数学Ⅱ・Ⅲ）

以下の問いに答えよ。

(1) i を虚数単位とし，a を実数とする。$2i$ が方程式 $z^6=a$ の解であるとき，a の値と $2i$ 以外の解をすべて求めよ。

(2) α を無理数とする。実数 x が

$$\cos x+\cos\alpha x=2$$

を満たすための必要十分条件は，$x=0$ であることを証明せよ。

(3) $2^{|x+1|}+2^{|x-1|+1}=5\sqrt{2}$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

【考察】

(1)は比較的簡単な内容である。(2)は必要性と十分性をともに示さなければいけないことに注意したい。

(3)では底2の対数を用いて解いていく。この問いとは直接関係はないが，平野教授は，数Ⅲでは底が e の対数ばかりを扱うせいか，底が e 以外の対数関数の微分が苦手な受験生や学生が多いとおっしゃっていた。

3 微分法（数学Ⅲ）

n を2以上の自然数とし，曲線 $y=x^n$ $(x>1)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^n)$ における接線を l とする。また，l 上に点B，Cを，Bの x 座標は t より大きく，Cの x 座標は t より小さくなるようにとる。

点 $\mathrm{D}(t,\ t^n+1)$ とし，y 軸上に点Eを $\angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{DAB}$ となるようにとる。l の傾きを $\tan\theta_1$，EとAを通る直線の傾きを $\tan\theta_2$ とする。ただし，$0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\theta_2<\dfrac{\pi}{2}$ である。

以下の問いに答えよ。

(1) l の方程式を n と t を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{DAB}=\theta$ とするとき，θ_1, θ_2 を θ を用いて表せ。

(3) θ_2 を θ_1 を用いて表せ。

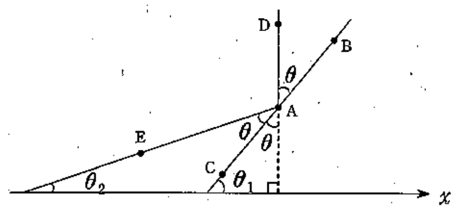
(4) $\tan\theta_2$ を $\tan\theta_1$ を用いて表せ。

(5) Eの y 座標を n と t を用いて表せ。

(6) Eの y 座標が t の値に関係なく一定となるような n の値を求めよ。

【考察】

やや条件が多く難解なイメージがあるが，図をかいてみると見通しが良くなる。特に，(3)，(4)では曲線を除いて直線のみの図にするとすっきりとまとまる。



図から，$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$ であることが簡単にわかる。

(6)は「tの値に関係なく一定$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dt}=0$」を用いるとよいとアドバイスをいただき，私自身勉強になった。

4　おわりに

どの問題も基本的な知識や技術が身に付いているか確認するのに適した良問であった。計算力，表現力，応用力の3観点を測るという意図が明確に反映された出題形式であり，普段の指導で3つの力を伸ばしていくことが求められる。

平野教授は，図やグラフをかいて考えることが重要だと繰り返しおっしゃっていた。私も普段の指導で図やグラフの重要性は繰り返し指摘しているが，式や文章と図やグラフを結び付けられない生徒が多い。入試問題も活用しながら，図を利用すると簡単に解ける問題もあるのだということを実感させて，図の利用を習慣化させたい。

論証問題では，場合分けして絶対値をきちんと外せるか，面積を求める際に関数の値が正であるかどうか確認しているかなど，採点時に注目している部分を教えていただいた。また，証明問題で思い込みで「成り立つ」と書いていないかなど，受験生の陥りやすいミスを指摘していただいたので，今後の指導の参考にしたい。

いろいろな見方ができる問題もあり，別解を探すことでさらに数学の学力を身に付けられる。型にはまった解法を暗記するだけでは解けない応用問題もあるため，問題にじっくりと向き合って，自分で実験してみて解法を導き出すような練習をさせていきたいと思う。