マレーシアの教科書を参考にした三角関数の指導の研究

愛媛県立内子高等学校　　小西　孝幸

1　はじめに

日本の高校２年生に当たるマレーシアの生徒が扱う，海外の数学の教科書を初めて手に取り，どのような内容なのか興味・関心が湧いたので，一部を和訳してみたところ，日本と比較をして社会生活と数学のつながりを強く意識しているように感じた。私は今年度２年生の数学Ⅱを担当しているため，数学Ⅱと共通の内容である「三角関数」に着目した。

日本とマレーシアの「三角関数」の内容を比較すると，本校で扱う教科書では 34 ページある。一方，マレーシアの教科書では 13 ページと少なく，「単位円による sin，cos，tan の定義」「三角関数の性質」「三角関数のグラフ」の３単元で構成され，度数法を用いて学習する。0° 未満，360° よりも大きい角 θ については，グラフのまとめで定義と織り交ぜながら，説明する程度である。

本校の生徒は，例年「三角関数」の単元は，弧度法を扱う時点で難色を示す。また，１年次の「三角比」で既に苦手意識を持つ生徒も多い。

マレーシアの教科書を読み込んでいくと，日本の指導内容や扱う問題とは少々異なる。日本のように，特定の θ の値や，特定の三角関数の値にとらわれず，定義を大切にした内容だと感じた。マレーシアの教科書を参考に学習を進めることで，日本の教科書内容を精選し，三角関数の定義を重視した学習により生徒の理解度が上がるのではないかと考え，研究の主題とした。

2　研究実践の内容

(1)　弧度法の利点

本校の生徒は，毎年弧度法の定着度が低いのが現状である。「扇形の弧の長さと面積の公式」は，度数法よりも弧度法の方がややシンプルで，弧度法の利点とも言える。しかし，それ以外で，生徒にとっては馴染みの薄い π が関わる弧度法は，難解な記号にしかすぎないようだ。下の図１のように，数学Ⅲの「三角関数の極限」や「微分法」などの操作や結果から，弧度法のよさが理解できると思う。

弧度法	度数法
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{180}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin x)'=\dfrac{\pi}{180}\cos x$

図１

私が担当する２年生の生徒は，数学Ⅲを選択することがないことと，数学に対して苦手意識が強い生徒が多いことから，１年次数学Ⅰの「三角比」の延長として度数法で授業を進めることにし，一般角や弧度法などは，まとめの学習の際に扱うことにした。

(2)　三角関数の定義

座標平面上で，下の図２のように x 軸の正の部分を始線として，反時計回りの動径 OP でできる角を θ とする。動径は一周分を考える。

$0° < \theta < 90°$ のとき，θ は第１象限の角
$90° < \theta < 180°$ のとき，θ は第２象限の角
$180° < \theta < 270°$ のとき，θ は第３象限の角
$270° < \theta < 360°$ のとき，θ は第４象限の角

とする。

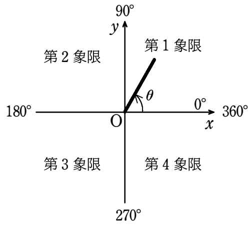


図２

座標平面上で，下の図３のように動径と原点を中心とする単位円との交点 P の座標を$(x,\ y)$とするとき，三角比と同様に，$\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$　と定める。

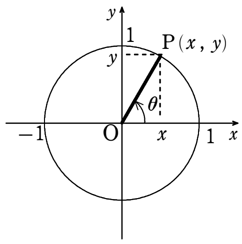


図３

これらのことから，下の図４ができる。

θ	第１象限	第２象限	第３象限	第４象限
$\sin\theta$	＋	＋	−	−
$\cos\theta$	＋	−	−	＋
$\tan\theta$	＋	−	＋	−

図４

本校が使用している教科書は，半径 r の円を用いて説明が始まるが，導入から単位円を用いた。

(3)　正弦、余弦，正接の値を求める

最初に，特定の角度における正弦，余弦，正接の値について考えさせた。$1:2:\sqrt{3}$ と $1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形を用いるが，斜辺が１であることから，図５のような直角三角形を用いて考えさせることで，単位円を利用してそれぞれの値を求めることができた。

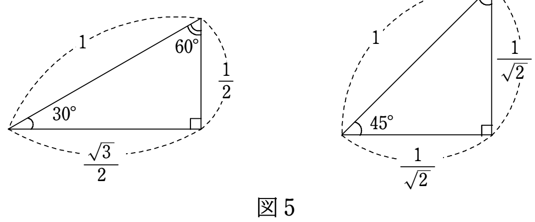


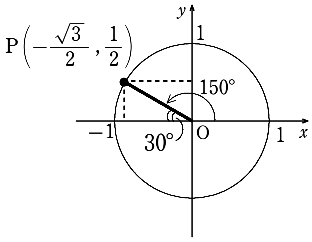
図５

次の通り具体的な例を示す。

$$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 150° = \frac{1}{2}$$

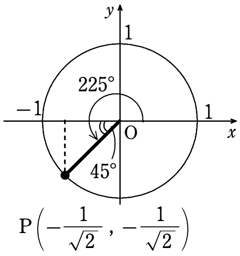
$$\tan 150° = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

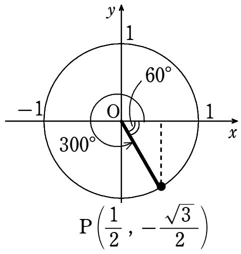
$$\tan 225° = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$



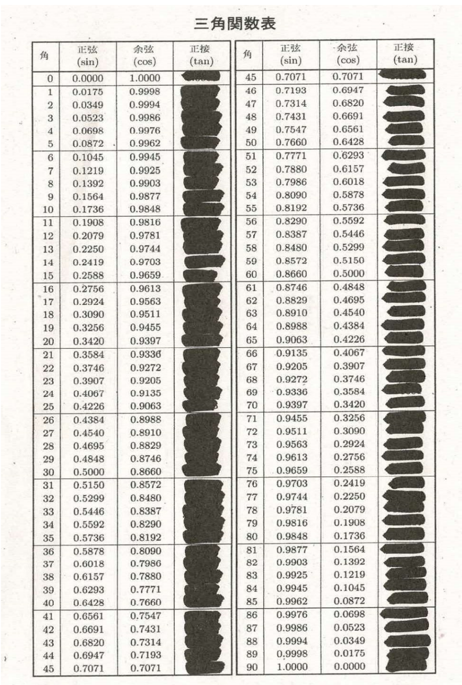
$$\cos 300° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 300° = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$



次に，三角関数の表を用いて，三角関数の値を求める。ただし，下の図 6 のように， $\tan\theta$ の値は黒塗りにし，定義を用いて求めさせた。小数第 4 位までの数を扱うため，計算機を利用させた。



三角関数表

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0	0.0000	1.0000	[redacted]	45	0.7071	0.7071	[redacted]
1	0.0175	0.9998	[redacted]	46	0.7193	0.6947	[redacted]
2	0.0349	0.9994	[redacted]	47	0.7314	0.6820	[redacted]
3	0.0523	0.9986	[redacted]	48	0.7431	0.6691	[redacted]
4	0.0698	0.9976	[redacted]	49	0.7547	0.6561	[redacted]
5	0.0872	0.9962	[redacted]	50	0.7660	0.6428	[redacted]
6	0.1045	0.9945	[redacted]	51	0.7771	0.6293	[redacted]
7	0.1219	0.9925	[redacted]	52	0.7880	0.6157	[redacted]
8	0.1392	0.9903	[redacted]	53	0.7986	0.6018	[redacted]
9	0.1564	0.9877	[redacted]	54	0.8090	0.5878	[redacted]
10	0.1736	0.9848	[redacted]	55	0.8192	0.5736	[redacted]
11	0.1908	0.9816	[redacted]	56	0.8290	0.5592	[redacted]
12	0.2079	0.9781	[redacted]	57	0.8387	0.5446	[redacted]
13	0.2250	0.9744	[redacted]	58	0.8480	0.5299	[redacted]
14	0.2419	0.9703	[redacted]	59	0.8572	0.5150	[redacted]
15	0.2588	0.9659	[redacted]	60	0.8660	0.5000	[redacted]
16	0.2756	0.9613	[redacted]	61	0.8746	0.4848	[redacted]
17	0.2924	0.9563	[redacted]	62	0.8829	0.4695	[redacted]
18	0.3090	0.9511	[redacted]	63	0.8910	0.4540	[redacted]
19	0.3256	0.9455	[redacted]	64	0.8988	0.4384	[redacted]
20	0.3420	0.9397	[redacted]	65	0.9063	0.4226	[redacted]
21	0.3584	0.9336	[redacted]	66	0.9135	0.4067	[redacted]
22	0.3746	0.9272	[redacted]	67	0.9205	0.3907	[redacted]
23	0.3907	0.9205	[redacted]	68	0.9272	0.3746	[redacted]
24	0.4067	0.9135	[redacted]	69	0.9336	0.3584	[redacted]
25	0.4226	0.9063	[redacted]	70	0.9397	0.3420	[redacted]
26	0.4384	0.8988	[redacted]	71	0.9455	0.3256	[redacted]
27	0.4540	0.8910	[redacted]	72	0.9511	0.3090	[redacted]
28	0.4695	0.8829	[redacted]	73	0.9563	0.2924	[redacted]
29	0.4848	0.8746	[redacted]	74	0.9613	0.2756	[redacted]
30	0.5000	0.8660	[redacted]	75	0.9659	0.2588	[redacted]
31	0.5150	0.8572	[redacted]	76	0.9703	0.2419	[redacted]
32	0.5299	0.8480	[redacted]	77	0.9744	0.2250	[redacted]
33	0.5446	0.8387	[redacted]	78	0.9781	0.2079	[redacted]
34	0.5592	0.8290	[redacted]	79	0.9816	0.1908	[redacted]
35	0.5736	0.8192	[redacted]	80	0.9848	0.1736	[redacted]
36	0.5878	0.8090	[redacted]	81	0.9877	0.1564	[redacted]
37	0.6018	0.7986	[redacted]	82	0.9903	0.1392	[redacted]
38	0.6157	0.7880	[redacted]	83	0.9925	0.1219	[redacted]
39	0.6293	0.7771	[redacted]	84	0.9945	0.1045	[redacted]
40	0.6428	0.7660	[redacted]	85	0.9962	0.0872	[redacted]
41	0.6561	0.7547	[redacted]	86	0.9976	0.0698	[redacted]
42	0.6691	0.7431	[redacted]	87	0.9986	0.0523	[redacted]
43	0.6820	0.7314	[redacted]	88	0.9994	0.0349	[redacted]
44	0.6947	0.7193	[redacted]	89	0.9998	0.0175	[redacted]
45	0.7071	0.7071	[redacted]	90	1.0000	0.0000	[redacted]

図 6

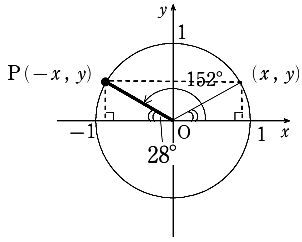
次のとおり具体的な例を示す。

第 2 象限の角については， y 軸に関して対称移動した直角三角形を用いて考える。

$$\cos 152° = -\cos 28° = -0.8829$$

$$\sin 152° = \sin 28° = 0.4695$$

$$\tan 152° = \frac{0.4695}{-0.8829} = -0.5317$$

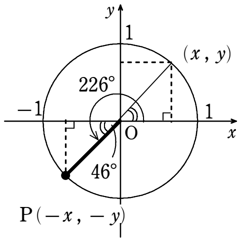


第 3 象限の角については，原点に関して対称移動した直角三角形を用いて考える。

$$\cos 226° = -\cos 46° = -0.6947$$

$$\sin 226° = -\sin 46° = -0.7193$$

$$\tan 226° = \frac{-0.7193}{-0.6947} = 1.0354\ (1.0355)$$

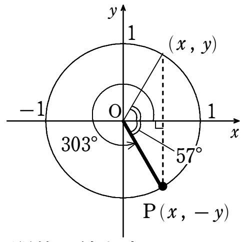


第 4 象限の角については， x 軸に関して対称移動した直角三角形を用いて考える。

$$\cos 303° = \cos 57° = 0.5446$$

$$\sin 303° = -\sin 57° = -0.8387$$

$$\tan 303° = \frac{-0.8387}{0.5446} = -1.5400\ (-1.5399)$$



(4)　三角関数の性質を利用して，三角関数の値を求める

三角関数の表を用いて，三角関数の値を求めたことを下の図 7のように一般化し，「三角関数の性質」についてまとめた。

ただし，　θ が第 2 象限のとき，$180° - \theta$

θ が第 3 象限のとき，$\theta - 180°$

θ が第 4 象限のとき， $360° - \theta$　を利用する。

また，それぞれの式において，左辺と右辺を比較すると， sin は sin，cos は cos，tan は tan で変化がない結果になり，符号は三角関数の定義から確認できる。

$$\sin\theta = +\sin(180° - \theta)$$
$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta)$$
$$\tan\theta = -\tan(180° - \theta)$$

$$\sin\theta = -\sin(\theta - 180°)$$
$$\cos\theta = -\cos(\theta - 180°)$$
$$\tan\theta = +\tan(\theta - 180°)$$

$$\sin\theta = -\sin(360° - \theta)$$
$$\cos\theta = +\cos(360° - \theta)$$
$$\tan\theta = -\tan(360° - \theta)$$

図 7

次のように，三角関数の性質を利用して，次のとおり三角関数の値を求めた。

$$\sin 315^\circ = -\sin(360^\circ - 315^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 258^\circ = -\cos(258^\circ - 180^\circ) = -\cos 78^\circ = -0.2078$$

$$\tan 320^\circ = -\tan(360^\circ - 320^\circ) = -\tan 40^\circ = -\frac{0.6428}{0.7660}$$

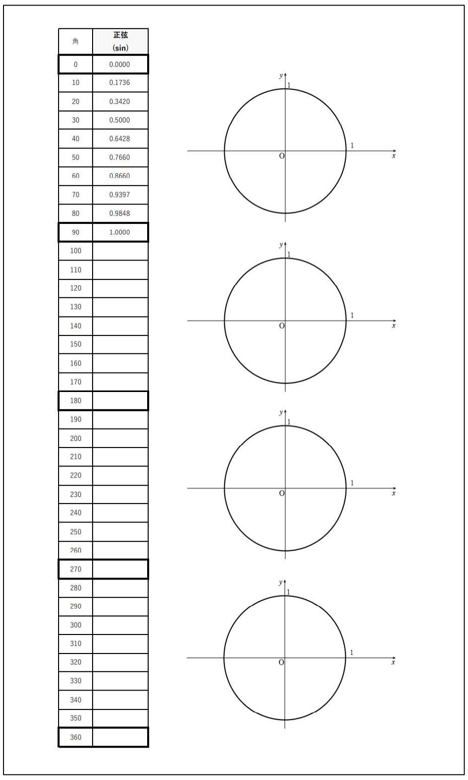
$$= -0.8391$$

単位円を用いるよりも，早く三角関数の値を求めることにつながった。しかし，本校の生徒にとっては，図を用いて求めることの方が，目に見えてはっきりと確認できるためか，その有用性を定着させるには至らなかった。

(5)　三角関数の方程式・不等式を解く

$\tan\theta$ については，難易度が上がるため，考査後のまとめの問題に組み込んだ。単位円を用いて，方程式については，三角関数の値を満たす θ を，(3) と同様に，$\sin\theta$ は y 軸，$\cos\theta$ は x 軸に関する対称性に注意させて，２個求めさせた。さらに，不等式においては，どの範囲になるかを図から確認することを徹底した。

(6)　三角関数 $y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ のグラフをかく



角	正弦 (sin)
0	0.0000
10	0.1736
20	0.3420
30	0.5000
40	0.6428
50	0.7660
60	0.8660
70	0.9397
80	0.9848
90	1.0000
100	
110	
120	
130	
140	
150	
160	
170	
180	
190	
200	
210	
220	
230	
240	
250	
260	
270	
280	
290	
300	
310	
320	
330	
340	
350	
360	

図８

$y=\sin\theta$ のグラフをかくために，図８のように，θ を10°刻みで変化させたときの y の値を求めさせた。その表をもとに座標平面上に点を取らせることで，グラフの概形を考えさせた。４つの単位円は，前述の (3) で考えたように，θ が第２象限から第４象限に存在するときの点Ｐの対称移動を確認させた。(3) の内容がしっかりと定着していたため，スムーズに表を完成させ，y の値の増減を表と単位円から確認することができた。

(7)　中間考査の問題と正答率について

第２学期中間考査の問題を一部挙げる。

$\boxed{1}$　三角関数について述べたものである。□ には適する語や数を，□ には適する不等号を入れよ。　【省略】

$\boxed{2}$　次の θ について，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$\theta=30^\circ$　【特定の θ の値について　他３問】

$\boxed{3}$　次の θ について，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。ただし，$\tan\theta$ の値は小数第５位を四捨五入せよ。

(1)　$\theta=70^\circ$　【三角比の表を用いて　他３問】

$\boxed{4}$　□ に適する符号（＋ or －）を入れよ。

(1)　$\cos(180^\circ-\theta)=\square\cos\theta$

(4)　$\sin(180^\circ-\theta)=\square\sin(360^\circ-\theta)$　【他３問】

$\boxed{5}$　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\cos\theta=-0.5736$　　(4)　$\sin\theta=\dfrac{7}{11}$

$\boxed{6}$　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\sin\theta<-0.9063$　　(4)　$\cos\theta>\dfrac{5}{13}$

$\boxed{7}$　関数 $y=\cos\theta$ のグラフをかけ。

各大問の平均点と正答率

大問	1	2	3	4	5	6	7	合計
満点	28	12	12	15	12	16	5	100
平均	13.9	8.7	7.9	8.3	3.9	5.8	1.7	50.1
正答率	49.6	72.5	65.8	55.3	32.5	36.7	34.0	50.1

大問２，３については，正答率が高かった。その後の問題に対して基本となる部分でもあり，時間をかけて丁寧に指導した成果だと思う。一方，大問６と７に関しては，授業の様子ではもう少し正答率が上がってもよいと思っていたが，定着度が低かった。

３　研究のまとめ

単位円を用いた三角関数の定義を利用し，特定の θ の値にこだわることなく三角関数の表を用いた授業は，私には新鮮な感覚の時間になった。三角関数の値を求めることは，考査の結果から見ても定着度が高く，成果が上がったと思う。その他，方程式・不等式，グラフに至るまでの過程も，スムーズにつながったと感じた。しかし，ここから課題研究などを通して，三角関数が実生活の中でどう生かされているのかを探究することで，より数学のおもしろさや有用性につなげていくことが必要だと感じた。来年度に向けた一つの大きな課題ができた。

新学習指導要領では，変化の激しい世の中を逞しく生き抜く力を身に付けるために，統計学を中心とした学習内容の変遷が行われるが，一方で海外の国々ではどのような数学教育が行われているのかを研究してみるのも興味深いと感じた。今回は，偶然手に入れたマレーシアの教科書の内容に沿った程度に過ぎないが，教科書を和訳し，一部を実践したことで，三角関数の有用性の幅が広がったように感じた。

※第２学期中間考査後に，弧度法や加法定理など，本校が使用している教科書内容について紹介する時間を設けた。