中四国の国公立大学入試問題の研究

―ＡＯ・推薦入試の問題から―

愛媛県立 今　治　北 高等学校　宮田　　誠
愛媛県立宇和島南中等教育学校　川野　星子

1　はじめに

2000 年度、東北大、筑波大、九州大の３校で始まった国立大のＡＯ入試では今年で 10 年余りが経過し、年々成熟と進化を図ろうとしている。

今年度入試での形態別の学校数では、国立大学 82 校中、ＡＯ入試実施校が 47 校、推薦入試実施校が 76 校、公立大学 80 校中、ＡＯ入試実施校が 23 校、推薦入試実施校が 78 校にのぼる。入学者比率を見てみると、国立大の全入学者約 10 万人のうち、推薦＋ＡＯ入学者は約 15%の約 1 万 5 千人、公立大学約 2 万 8 千人のうち、推薦＋ＡＯ入学者は約 25%の 7 千 5 百人を占めている。ＡＯ入試に関しては、国公立大学の総定員約 3 千人に対して、志願者数は約 1 万 1 千人を超えている。

ＡＯ入試に関しては、推薦・一般入試にはなかった、新しい人材発掘の理念と戦略を備えている。その傾向は、名古屋工大の「工学創成プログラム」、島根大総合理工の「理工特別コース」、愛媛大の「スーパーサイエンス特別コース」、九州大の「21 世紀プログラム」など、ＡＯ入試に特別なプログラムが組み込まれていることでも明らかである。推薦入試では、医療・教育分野などで「地元枠」あるいは「地域優遇型」の推薦入試が増加している。2004 年度の独立法人化以降、教育分野では、いわゆる団塊世代の大量退職に伴い、特に過疎地、へき地の教員を志す者の不足、地域医療では、医師不足などの地域の問題に対して、各地域との連携を強化している。今後も、医療・教育分野を中心に増加する傾向にあると思われる。

近年のＡＯ入試の拡大に伴って、その理念が推薦入試にも大きな影響を及ぼし、実施要項の改訂以前からアドミッションポリシーや「求める人物像」を明記する傾向が定着している。また、文部科学省は 2011 年度の通達で、ＡＯ入試に限らず全入試において「合格から入学までの学習喚起」を講ずるよう、初めて全大学に求めた。今後はいっそう入学準備教育の充実が進むと期待される。特に、入学準備教育はＡＯ全体のプロセスを形成する一環であるため、大学の教育プログラムへの熱意・向上心に欠ける受験生は、最悪の場合、合格を取り消すと要項に明記している大学もあることを忘れてはならない。出題問題の中から、昨年度の中四国の国公立大学のＡＯ入試・推薦入試で実際に出題された数学の問題を取り上げてみる。

2　平成２５年度推薦入試問題から（四国地方、抜粋）

以下に推薦入試における教科面接の質問内容を紹介する。

- $\sin^2\theta + \cos\theta = 1\ (0° \leqq \theta \leqq 180°)$ のとき、θ を求めよ。
- $y = 3x^2 - 6x - 9$ について、$y < 0$ のとき、x の範囲を求めよ。

（愛媛大　工　環境建設工　推薦）

- $y = x\sqrt[3]{x}$ 、$y = x^{\sin x}$ を微分せよ。
- $\dfrac{1}{2}\log_3 4$、$\log_9 2$、$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}$ を大きい方から順に並べよ。
- 1から25の数字について、2の倍数または3の倍数はいくつあるか。
- $y = x^2$ と $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 3A + 2E = 0$ を満たすとき、$a + d$、$ad - bc$ の値を求めよ。
- 連立不等式 $\begin{cases} |2x - 3| > 0 \\ 4x - 1 > 3(x - 3) \end{cases}$ を解け。
- $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ の最大値、最小値を求めよ。

（徳島大　工　知能情報工学　推薦）

3　平成２５年度ＡＯ・推薦入試問題から（四国地方）

愛媛大学　理学部　数学総合　ＡＯ入試

【第１問】

次の $\boxed{}$ に入る数、式、または行列を解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　a、k を実数、i を虚数単位とする。$x = a - i$ が

$$x^2 + (-1 + ki)x + 5i = 0$$

をみたすとき、$a = \boxed{\text{ア}}$、$k = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$\{a_n\}$ を公比 r の等比数列とする。$a_2 = 2$、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -2$ のとき、$r = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　$y = \dfrac{1}{x+1}$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ 、y 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$ 平行移動すると $y = \dfrac{1 - 2x}{x - 1}$ と重なる。

(4)　1から4までの数字が書かれたカードが2枚ずつ、合計8枚ある。この中から3枚のカードを同時に取り出すとき、同じ数字のカードが取り出される確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(5)　$h>0$、$r>0$、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。3点$(r,\ 0,\ h)$、$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$、$(r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ 0)$ を頂点とする三角形の面積はh、r、θ を用いて $\boxed{\text{キ}}$ と表される。

(6)　$A+B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$、$A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ のとき、$A^2-B^2=\boxed{\text{ク}}$ である。

【第２問】

次の命題の真偽を判定し、解答用紙に書かれた真または偽のいずれか一方の文字に○を付けよ。さらに、真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ。

(1)　実数x、yについて、つねに$x+y\leqq\sqrt{2(x^2+y^2)}$ が成り立つ。

(2)　$x>0$ において、関数$f(x)$ の導関数$f'(x)$ がつねに正ならば、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ である。

(3)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である。

(4)　関数$f(x)$ は、すべての実数x、yについて

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

を満たすとする。このとき、すべての実数x について $f(-x)=-f(x)$ である。

【第３問】

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点$P(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

で与えられることを示せ。ただし、$r>0$ とする。

【第４問】

a、k を正の数とするとき、次の問いに答えよ。

(1)　$y=\log x$ 上の点$(a,\ \log a)$ における法線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた法線と直線$y=-k$ の交点のx 座標を$f(a)$ とする。$f(a)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた$f(a)$ が、$a>0$ の範囲で単調に増加するためのk の範囲を求めよ。

(4)　k が(3)で求めた範囲にあるとし、点P は直線$y=-k$ 上にあるとする。このとき点P を通る $y=\log x$ の法線はちょうど１本であることを示せ。

高知大学　理学部　数学分野　推薦入試

【第１問】

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

円周率π と円の円周の長さを求める公式について考えよう。どんな円でも円周の長さを直径で割った値は同じであることが知られているので、この値を円周率と呼びπ と書く。したがって、(1)半径r の円の円周の長さは$2\pi r$ であることがわかる。これから(2)直角は弧度法で表すと$\dfrac{\pi}{2}$(ラジアン)となることもわかる。

では円周率は本当に3ぐらいの大きさだろうか。円の円周の長さはその円に内接する多角形の周の長さより大きく、外接する多角形の周の長さより小さいという事実を用いて考えてみよう。そこで、円に内接する正六角形と外接する正六角形を考えることにより調べてみると、(3)円周率は3と$2\sqrt{3}$ の間の数であることがわかる。さらに、外接する正十二角形で同じことを考えると(4)$\pi<12(2-\sqrt{3})$ となり、(5)$12(2-\sqrt{3})<2\sqrt{3}$ であるから、、正六角形で考えたよりも近い近似値を与えている。

(1)　下線部(1)を示せ。

(2)　下線部(2)について説明せよ。

(3)　下線部(3)について説明せよ。

(4)　下線部(4)について説明せよ。

(5)　下線部(5)を示せ。

【第２問】

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

$f(x)=-3x^2-\dfrac{7}{2}x-1$ とおく。数列$\{a_n\}$ は$a_1=1$ で、かつ

$$a_{n+1}=\begin{cases}0 & (a_n\neq 0\ \text{のとき})\\ f(a_{n-1}) & (a_n=0\ \text{のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすものとする。

(1)　数列$\{a_n\}$ の最初の5項を求めよ。

(2)　a_{108} を求めよ。

(3)　正の整数M に対して、$\displaystyle\sum_{k=1}^{5M}ka_k$ を求めよ。途中の計算も書くこと。

(4)　$a_na_{n+1}=0$ がすべての正の整数n について成り立つことを証明せよ。

(5)　生徒Aは「すべての正の整数n について$x_nx_{n+1}=0$ をみたす数列$\{x_n\}$ は、偶数番目の項がすべて0であるか、または奇数番目の項がすべて0である。」と言った。生徒Aの主張は正しいだろうか。理由をつけて答えよ。

(6)　上の生徒Aの発言を受けて、生徒Bは「最初の有限個の項についてはどうかわからないけど、それから後の項については生徒Aの言うとおりだ。」と言った。生徒B

の主張は正しいだろうか。理由をつけて答えよ。

【第３問】

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

4点A、B、C、D を頂点とする四面体を考える。ただし、点A、B、C、D は同じ平面上にはないものとする。また、$0<x<1$ となる実数 x に対して、(1)4点E、F、G、H をそれぞれ辺AB、BC、CD、DA を $x:(1-x)$ の比に内分する点とする。

以下では、点E、F、G、H の位置関係を調べよう。

まず、$x=\dfrac{1}{2}$ のときを考えよう。このとき、点E、F、G、H がそれぞれ辺AB、BC、CD、DA の中点であることに注意すると、(2)辺EF と辺HG とは平行であることがわかる。したがって、(3)点E、F、G、H は同じ平面上にあり、特に、図形EFGH は平行四辺形である。

次に、$x\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のときを考えよう。点E、F、G を通る平面と辺DA が辺DA を $y:(1-y)$ の比に内分する点P で交わるとしよう。このとき、点P はE、F、G を通る平面上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=u\overrightarrow{\mathrm{EF}}+v\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ となる実数 u、v がただ1組存在する。したがって、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を x、u、v、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表すことができる。一方で、点P は辺DA 上の点でもあるから、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を y、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表すことができる。これらに注意すると、(4)y が x に対してただ一つ定まることがわかる。この点P と点H が一致するのは、$x=y$ のときであるので、これをみたす x が存在するかどうかを調べることにより点E、F、G、H が同じ平面上にあるかを判定することができる。

(1)　下線部(1)について、$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ をそれぞれ x、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ。

(2)　下線部(2)が成り立つ理由を述べよ。

(3)　下線部(3)が成り立つ理由を述べよ。

(4)　下線部(4)について、u、v、y をそれぞれ x の式で表せ。また、求める方法についても説明せよ。

(5)　点E、F、G、H が同じ平面上にあるような $0<x<1$ をすべて求めよ。また、求める方法についても説明せよ。

高知工科大学　マネジメント学部

数理マネジメントプログラム　AO入試

【第１問】

次の各問いに答えよ。

(1)　実数 x、y が $x+2y\leqq 6$、$2x+y\leqq 8$、$x\geqq 0$、$y\geqq 0$ を満たして動くとき、$x+y$ の最大値とそのときの x、y の値を求めよ。

(2)　3桁の自然数 n の各桁の数の和は5である。このとき、n が5の倍数である確率を求めよ。

(3)　二つの不等式

$$p^2\leqq q\leqq -p^2+4p$$
$$p^2-1\leqq q\leqq 4p-3$$

を考える。$p=1$ のとき、これらを同時に満たす q が存在するかどうか答えよ。さらに、これらを同時に満たす q が存在するための p の条件を求めよ。

(4)　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ について、$A^2+2A=5(A+2E)$ が成り立つことを証明せよ。また、$A^{n+1}+2A^n$ を A、E を用いて表せ。ただし、E は単位行列である。また、n は自然数である。

【第２問】

n を2以上の整数とする。次の各問に答えよ。

(1)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ を満たす θ に対して、座標平面上に3点

$\mathrm{A}_0(1,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $A_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

をとる。三角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の面積S の最大値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{\pi}{n}\leqq\theta<\dfrac{2\pi}{n}$ を満たす θ に対して、座標平面上に $n+1$ 個の点

$\mathrm{A}_0(1,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $A_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ $,\cdots,\mathrm{An}(\cos \mathrm{n}\theta,\ \sin n\theta)$

をとる。$(n+1)$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ の面積S を n と θ で表せ。

(3)　$f(\theta)=\cos\theta-\cos n\theta$ とおく。方程式 $f(\theta)=0$ は、$\dfrac{\pi}{n}\leqq\theta<\dfrac{2\pi}{n}$ において、ただ1つの実数解 $\theta=\dfrac{2\pi}{n+1}$ をもつことを証明せよ。

(4)　(2)で求めた面積S の最大値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

(5)　(4)で求めた最大値を S_n とおく。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n$ を求めよ。

【第３問】

開区間 I で定義された関数 $f(x)$ について、極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

が存在するとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で擬微分可能であるといい、その値を擬微分係数とよんで $f^*(a)$ で表す。次の各問に答えよ。

(1)　関数 $f_1(x)=x^2$ は $x=a$ で擬微分可能であることを証明せよ。

(2)　関数$f_2(x)$を

$$f_2(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq 0\text{ のとき})\\ x^p & (x>0\text{ のとき})\end{cases}$$

で定義する。ただしpは正の定数とする。$f_2(x)$が$x=0$で擬微分可能であるためのpの条件を求めよ。

(3)　関数$f_3(x)$を

$$f_3(x)=\begin{cases}0 & (x\fallingdotseq 0\text{ のとき})\\ 1 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

で定義する。$f_3(x)$が$x=0$で擬微分可能であることを証明せよ。

(4)　関数$f(x)$が$x=a$で微分可能であれば、$x=a$で擬微分可能であること、および微分係数と擬微分係数が一致することを証明せよ。

【第４問】

以下の各問に答えよ。

(1)　$\vec{0}$でない2つの2次元ベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$に対して、内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$で定義する。ただし、$\theta$は二つのベクトルのなす角で、$0\leqq\theta\leqq\pi$とする。また、どちらかが$\vec{0}$のときは$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$と定める。このとき、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　2次元ベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$が$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$であるとき、(1)で定義された内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

を満たすことを示せ。

(3)　2以上の整数nに対し、n次元ベクトル$\vec{a}$を$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$と定義する。ただし、$a_i\ (1\leqq i\leqq n)$は実数とする。また、設問(1)とは異なり、これとベクトル$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$との内積を

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

で定義する。ただし$b_i\ (1\leqq i\leqq n)$も実数とする。さらに、ベクトル$\vec{a}$の大きさ$|\vec{a}|$を　$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$　により定義する。このとき、2以上のすべての整数nについて、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

を満たすθが存在することが以下のように証明できる。この証明を読み、後の設問(3−1)～(3−4)に答えよ。

【証明】$\vec{a}$、$\vec{b}$の少なくとも一方が$\vec{0}$のとき、θが存在することは明らかである。…(ⅰ)　それ以外の場合、不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2\right)$$

を証明すればよい。…(ⅱ)

以下、nに関する数学的帰納法で証明する。$n=2$のときは、この不等式は成り立つ。…(ⅲ)

次に、$n=k$のときに成り立つと仮定した場合、

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k}a_ib_i+a_{k+1}b_{k+1}\right)^2$$

$$\leqq\left(\left(\sum_{i=1}^{k}a_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}b_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}+a_{k+1}b_{k+1}\right)^2\cdots(*)$$

が成り立つ。ここで、$n=2$のときの結果から

$$(*)\leqq\left(\sum_{i=1}^{k}a_i{}^2+a_{k+1}{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}b_i{}^2+b_{k+1}{}^2\right)$$

が成り立つ。…(ⅳ)

この不等式の右辺は$\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}b_i{}^2\right)$に他ならないから、(ⅱ)の不等式は$n=k+1$のときも成り立つ。よって、数学的帰納法により、2以上のすべてのnに対して、(ⅱ)の不等式が成り立つ。

設問(3−1)　(ⅰ)の理由を説明せよ。

(3−2)　(ⅱ)の理由を説明せよ。

(3−3)　(ⅲ)の理由を説明せよ。

(3−4)　(ⅳ)においては、$n=2$の場合の結果をどのように用いたのか、具体的に説明せよ。

４　平成２５年度　ＡＯ入試問題（中国地方）

広島大学　理学部　数学科　筆記試験問題

［１］　円Ｃ：$x^2+y^2=1$と点Ｐ$(-\sqrt{a},0)$（$a>1$）を考える。

(1)　点Ｐを通り，円Ｃに接する２直線ℓ，ｍの方程式を求めよ。ただし，ℓの傾きはｍの傾きより大きいとする。

(2)　点Ｐを通る放物線$y=x^2-a$と(1)で求めた直線ℓ，ｍの交点のうちＰでない方をそれぞれＱ，Ｒとする。Ｑ，Ｒの座標を求めよ。

(3)　(2)で求めた点Ｑ，Ｒに対して，線分ＱＲの長さ$d(a)$，および極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}d(a)$を求めよ。

［２］　四面体ＯＡＢＣは次を満たすとする。

ＯＡ＝ＯＢ＝ＯＣ＝１，ＡＢ＝ＢＣ＝$\sqrt{2}$，ＣＡ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

点Ｏを基準とする点Ａ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルをそれ

ぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とする。

(1)　内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$を求めよ。

(2)　辺ＯＡ，ＢＣ，ＯＣ，ＢＡをｔ：(１－ｔ)に内分する点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとする。線分ＰＱと線分ＲＳの中点が一致することを示せ。

(3)　(2)の線分ＰＱと線分ＲＳが直交するときのｔの値を求めよ。

［３］　関数$f(x)=xe^{-x}$を考える。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$において，曲線$y=f(x)$と直線$x=1$とx軸で囲まれた図形Ｄの面積を求めよ。

(2)　(1)の図形Ｄをx軸のまわりに１回転してできる回転体の体積を求めよ。

［４］　関数$f(x)=\sin x-\sin 2x$を考える。

(1)　$f(x)=0$となるxで$0<x<\pi$を満たすものをすべて求めよ。

(2)　$y=f(x)$は$0<x<\pi$において極大値および極小値をそれぞれ１回ずつとることを証明せよ。

(3)　$y=f(x)$は$x=\alpha$（$0<\alpha<\pi$）において極小値をとるとする。このとき$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$であることを証明せよ。

［５］　ｎは３以上の自然数とする。１からｎまでの数字が１つずつ書かれたｎ個の玉が，箱の中に入っている。

(1)　箱の中から１つの玉を取り出し,それを箱に戻してから，再び箱の中から１つの玉を取り出す。このとき，１回目に取り出した玉と２回目に取り出した玉に書かれている数字の積が，偶数になる確率を求めよ。

(2)　ｋをｎ－２以下の自然数とする。箱の中から３つの玉を同時に取り出すとき，取り出した３つの玉に書かれている数の最小値がｋである確率Ｐ(ｋ)を求めよ。

(3)　ｋをｎ－２以下の自然数とする。(2)の確率Ｐ(ｋ)を最大にするｋの値とそのときのＰ(ｋ)を求めよ。

広島大学　教育学部　第２類（科学文化教育系）
数理系コース　小論文問題（総合評価方式）

［１］　高等学校の数学Ｂでは,ベクトルについて学習する。

(1)　平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$の和について，交換法則と結合法則が成り立つことを説明せよ。

(2)　ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を学習することのよさは何か，具体例をあげて各自の考えを述べよ。

［２］　次の問いに答えよ。

(1)　１からnまでの自然数の和について次の等式が成り立つことを説明せよ。

$$1+2+3+\cdot\cdot\cdot\cdot+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)　１からnまでの自然数の平方の和について次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1^2+2^2+3^2+\cdot\ \cdot\ \cdot+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　$(k+1)^4-k^4$の計算結果を利用して，１からnまでの３乗の和

$$1^3+2^3+3^3+\cdot\ \cdot\ \cdot+n^3$$

を求めよ。

(4)　数列$1^2,2^2,2^2,3^2,3^2,3^2,4^2,4^2,4^2,4^2,\cdot\ \cdot\ \cdot$は，$m^2$が$m$個（$m=1$，２，３，４，・・・）ずつ続く数列である。

（ⅰ）　初項から第２０１５項までの和を求めよ。

（ⅱ）　初項から第n項までの和が１００００以上になるような最小のnの値を求めよ。

［３］　次の問いに答えよ。

(1)　曲線$y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$の概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x(\log x)^2=0$を使ってもよい。

(2)　２以上の自然数nに対して定義された数列$\{S_n\}$を

$$S_n=\frac{1}{2(\log 2)^2}+\frac{1}{3(\log 3)^2}+\cdot\ \cdot\ \cdot+\frac{1}{n(\log n)^2}$$

（$n=2$，３，４，・・・）

で定めると，その極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$が存在することが知られている。このとき，次の不等式

$$m\leqq\lim_{n\to\infty}S_n\leqq M$$

を満たす実数m，Ｍについて，mのできるだけ大きな値とＭのできるだけ小さな値を求めよ。

(3)　ｋを正の定数とするとき，xについての方程式$x(\log x)^2=k$の異なる実数解の個数を調べよ。

広島大学　理学部　物理科学科　筆記試験問題
（総合評価方式Ｉ型）（抜粋）

［１］ 次の問いに答えよ。各解答にはその導き方も書くこと。

問１．Ａ＝$\begin{pmatrix} \cos\alpha+1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-1 \end{pmatrix}$

ただし，０＜α＜２πとするとき，Ａが逆行列を持たないときのαの値を求めよ。

問２．放物線 $y^2=8x$ について，次の問いに答えよ。

⑴　傾きがｍである接線の方程式を求めよ。

⑵　⑴の接線と直交するもう一つの接線を考え，この２つの接線の交点Ｐの座標を求めよ。

問３．３点Ａ(３，４，０)，Ｂ(４，６，１)，Ｃ(１，６，４)を頂点とする△ＡＢＣにおいて，∠ＢＡＣの大きさθを求めよ。

問４．白玉５個と赤玉４個が入っている袋から，玉を２個取り出す時，次の各場合に，取り出した２個の玉が両方とも白玉である確率を求めよ。

⑴　最初に１個取り出し，袋にもどしてから２個目を取り出す場合。

⑵　２個を同時に取り出す場合。

問５．次の不定積分を求めよ。

$$\int(2x-1)\log x dx$$

広島大学　工学部　第三類（化学・バイオ・プロセス系）
小論文問題（抜粋）

問２．直角三角形の斜辺の長さを c とし，その他の辺の長さを a,b としたとき

$$a^2+b^2=c^2$$

なる関係が成立する。この定理を三平方(ピタゴラス)の定理という。

⑴　この直角三角形を図示し，三平方の定理を証明しなさい。

⑵　c を一定としたとき，最大となる面積Ｓを導出しなさい。

⑴，⑵とも解法はいくつかある。可能ならば複数の解法を述べなさい。また，完答せずとも考え方をできるだけ説明しなさい。

岡山大学　環境理工学部　環境数理科学科
小論文（抜粋）

【第２問】

座標平面において３点Ｐ(０，１)，Ｑ(１，０)，Ｒ(ｔ，ｔ)(ｔ＞０)を頂点とする三角形は正三角形であり，座標平面上の変換 $f:(x,y)\alpha\ (x',y')$ は

$$\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=2x+y \end{cases}$$

であるとする。また，変換 f による点Ｐ，Ｑ，Ｒの像をそれぞれ P',Q',R' とし，Ｏは原点(０，０)を表すものとする。

問１．角 $P'OQ'$ の大きさを求めなさい。

問２．点 P',O,Q',R' を頂点とする四角形の面積Ｓの求め方を詳しく述べ，Ｓの値を答えなさい。

【第３問】

n を自然数とする。このとき，次の問１，問２に答えなさい。

問１　k は n 以下の自然数とする。関数

$$f(x)=k(n-k)x-knx\log x \quad (x>0)$$

の最大値 a_k を求めなさい。ただし，対数は自然対数とする。

問２　問１で求めた a_k に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(a_1+a_2+\cdot\ \cdot\ \cdot+a_n)$$

を求めなさい。

５　平成２５年度　推薦入試問題から（中国地方）

山口大学　理学部　数理科学科　小論文（一部略）

【問題１】

三角形の面積について

$$\frac{1}{2}\times（底辺の長さ）\times（高さ）・・・①$$

三角形ＯＡＢにおいて，角Ｏの大きさをθで表し，ＯＡ＝a，ＯＢ＝b とおくと，三角形ＯＡＢの面積Ｓは，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta\ ・・・②$$

で表すことができます。また，式②から

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\ ・・・③$$

というように，ベクトルを用いても表すことができます。

三角形ＯＡＢにおいて，ＯＡ＝a，ＯＢ＝b，ＡＢ＝cとし， ｓ＝$\dfrac{a+b+c}{2}$とおくと，三角形ＯＡＢの面積Ｓは，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\cdots④$$

と表すことができます。

問１　式①から式②を導きなさい。

問２　式②から式③を導きなさい。

問３　平らな土地にある大きな三角形の面積を求めるとき，式①と④ではどちらの求め方が便利であると考えられるか。２つの式を比較しながら，理由をつけてあなたの考えを述べなさい。

【問題２】

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の少なくとも一方が発散するとき，数列 $\{a_n b_n\}$ の収束・発散について考察しましょう。

問１　数列 $\{a_n\}$ が発散し，数列 $\{b_n\}$ が収束するとき，数列 $\{a_n b_n\}$ の収束・発散について論じなさい。

問２　２つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに発散するとき，数列 $\{a_n b_n\}$ の収束・発散について論じなさい。

【問題３】

次の文章を読んで，問１～問５に答えなさい。

ｍを自然数とします。非負整数（０以上の整数）a，b に対し，$a \oplus b$ は $a+b$ をｍで割った余りを表すとします。例えば，ｍ＝７のとき，

$2\oplus 3=5$，$4\oplus 5=2$，$10\oplus 5=1$

です。

問１　ｍ＝７のとき，次の式(ア)，(イ)をそれぞれ計算しなさい。

(ア) $(5\oplus 6)\oplus 9$　　(イ) $16\oplus(33\oplus 61)$

(A)　すべての非負整数 a，b に対し，$a\oplus b=b\oplus a$ が成り立つ。

(B) すべての非負整数 a，b，c に対し，$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$ が成り立つ。

(C) すべての非負整数 a，b，c に対し，$(a\oplus b)\oplus c$ は $a+b+c$ をｍで割った余りに等しい。

問２　命題(C)が成り立つことを示しなさい。

ｍ＝７とし，０以上６以下の整数からなる集合をＳとします。次のような６つのマス目があり，各マス目に１つずつＳの要素を入れます。

ただし，

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

としたとき，必ず

$a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_4\oplus a_5\oplus a_6=0$ が成り立つようにします。また，複数のマス目で同じ数が使われてもよいものとします。

問３　次の空いたマス目に入る適切な数を答えなさい。

4	0	5		2	4

問４　問３のように，空いたマス目が１つの場合は，そこに入るＳの要素はつねにただ１つ存在することを示しなさい。

問５　集合Ｓおよびマス目の個数は変えずに，ｍを７以外の自然数に変えた場合，問４と同様のことが成り立つでしょうか。理由をつけてあなたの考えを述べなさい。

島根大学　総合理工学部　数理・情報システム学科

小論文

【問題１】

次の問いに答えよ。

(1)　次の関数を微分せよ。

(a)　$(x^2+x+1)^5$　　　(b)　$\dfrac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$

(2)　次の不定積分を求めよ。

(a)　$\displaystyle\int \sin^{2012}x\cos x\,dx$　　(b)　$\displaystyle\int x\sqrt{2x+3}\,dx$

【問題２】

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=x\log x$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x(\log x)^2=0$ であることは用いてよい。

(2)　点(０，－１)を通る曲線 $y=x\log x$ の接線の方程式を求めよ。

(3)　k を実数とするとき，方程式 $x\log x=x+k$ の解の個数について調べよ。

【問題３】

次の問いに答えよ。

(1)　不定積分 $\int te^{-t}dt$ を求めよ。

(2)　$x>0$ とするとき，積分 $\int_{-x}^{x}|t|e^{-t}dt$ を計算せよ。

(3)　$x>0$ に対して，$f(x)=\int_{-x}^{x}|t|e^{-t}dt$ とするとき，

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

【問題４】

平面上の４点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=1$，

$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ とし，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ とする。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を θ を用いて表せ。

(2)　$t=\sin\theta$ とおいて，$|\sin\theta\overrightarrow{OA}+\cos\theta\overrightarrow{OB}|^2$ を t の式で表せ。

(3)　$|\sin\theta\overrightarrow{OA}+\cos\theta\overrightarrow{OC}|$ の最小値を求めよ。また，その最小値を与える θ の値を求めよ。

【問題５】

次の問いに答えよ。

(1)　2^6 の約数の個数を求めよ。

(2)　１５５５２の約数の個数を求めよ。

(3)　１５５５２の全ての奇数の約数の和を求めよ。

(4)　１５５５２の全ての約数の和を求めよ。

６　まとめ

ＡＯ入試と推薦入試の問題の筆記試験・教科面接の問題の一部を紹介した。難問はないものの全範囲を基礎・基本から応用まで幅広く問われているため、生徒自身の表現力が問われるのではないかと思われる。入試に限らず、新教育課程における言語活動の充実を図るためにも、普段の授業の中から表現力を身に付けさせていきたい。ただし，センター試験を使わないＡＯ・推薦入試では、試験日が９月から１１月にあり、２次レベルの力が要求されるので，それまでに十分な学力を身につけておくことが求められる。また，公式を使って解くだけではなく，公式の導き方（広島大工学部の三平方の定理の証明や山口大理学部の三角形の面積の公式を導く問題，広島大学理学部数学科のＡＯ入試の口頭試問において剰余の定理の証明など）も確認しておくことが大切である。

今回の研究から，ＡＯ入試や推薦入試の問題では，長い問題文を読み解く力に加え，自分の考えを論理的に相手に伝える表現力も必要であると感じた。日頃から数学を含め自然科学の分野に興味関心を持ち，自分なりに考え相手に伝える活動を普段の授業の中で取り入れられるよう工夫していきたい。