課題学習における授業実践に向けた研究

愛媛県立新居浜西高等学校　　矢野　大志

1　はじめに

令和４年度からの新教育課程では，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲにおいて課題学習が設定されるようになる。

学習指導要領解説では，数学的活動を一層重視し，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにするとともに，数学的に考える資質・能力を高めるよう，課題学習を位置付けているとあり，具体例とともに詳しく解説されている。

数学Ⅲにおける課題学習を，どのように行うことができるかについての研究を行った。数学Ⅲにおいては，極限，微分法，積分法について課題学習の具体例がそれぞれ示されている。今回はその中で極限におけるニュートン法について，どのように課題学習を行うかを研究した。

2　学習指導要領解説から

(1)　課題学習について

課題学習とは，極限，微分法，積分法の内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどした課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識させ，学習意欲を含めた数学的に考える資質・能力を高めるようにするための学習である。取り上げる課題については，学習する内容を総合したり，日常の事象や他教科等での学習事項に関連付けたりするなどして見いだされるものや，生徒の疑問を基にしたものなどを設定する。

(2)　課題学習として示されている例

〈極限〉

数列の極限を事象の考察に活用できるようにする。例えば，$\sqrt{2}$ が漸化式 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$，$a_1=2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限であることを用いて，$\sqrt{2}$ の近似値を求めることを取り扱う。この応用として，ニュートン法による方程式の解の近似計算について文献により調査してみる。関数 $f(x)$ に関するニュートン法とは，適切な初項 a_1 を選び，漸化式 $a_{n+1}=a_n-\frac{f(x)}{f'(x)}$ によって定義される数列の極限を考えることにより，方程式 $f(x)=0$ の解の１つを近似的に求める方法である。

$f(x)=x^2-2$ とすれば前述の漸化式を得る。コンピュータなどの機器を用いて，実際に方程式の解の近似計算をするプログラムを制作することも考えられる。また，発展的には，3 次以上の方程式の解の近似値を求めたり，初項の選び方によって収束値が変わるかどうかの考察を行ったりすることが考えられる。

3　課題学習の実施方法について

学習指導要領解説には，課題学習の実施において，「適切な時期や場面を考慮し，指導計画に適切に位置付ける。各内容の学習の早い時期に位置付けることも考えられる。」とある。その単元の授業を実施する前か後か，生徒の習熟度などを踏まえて，いくつかの実施方法を考えた。

(1)　レポート（調べ学習）として実施する

これは数学Ⅱにおける微分法と数学Ｂにおける漸化式について既習であるなら，レポートとして実施させることが可能であると思われる。多くの生徒はインターネット等を活用してレポートを作成すると予想される。そのため，ただ単にインターネットのページを丸写ししたようなレポートにならないよう，指示を工夫するが必要であると考えた。また，生徒の習熟度も考慮して，指示しなければならないとも考えた。

例１は極限の単元を行う前に実施するレポートとして，例２は極限の単元を終了した後に実施するレポートとして考えた。

例１　ニュートン法について調べ，$\sqrt{2}$ の値について考えよう。

1　ニュートン法の考え方を調べよう。

2　関数 $f(x)=x^2-2$ を用いて，$\sqrt{2}$ の近似値を求めるための数列 $\{a_n\}$ の漸化式をつくろう。

3　初項 $a_1=2$ として第２項から第５項まで求めてみよう。

4　初項を自分で設定し（2 以外で），第２項から第５項まで求めて，気付いたことをかこう。

ニュートン法について調べ，$\sqrt{2}$ の値について考えよう　　　年　組　番　氏名

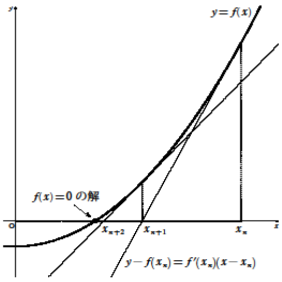
1　ニュートン法について調べてみよう。

ニュートン法は，関数 $y=f(x)$ の $y=0$ との交点の座標を求める方法で，$\sqrt{2}$ などの近似値を求めるのに使うことができる。

関数 $y=f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線は $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$ となる。この接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とすると，

$$0-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となる。このとき，x_{n+1} は x_n よりも $f(x)=0$ の解の1つである x の値に近づいている。これを繰り返すことでだんだんと解に近づいた値が分かる。



2　関数 $f(x)=x^2-2$ を用いて，$\sqrt{2}$ の近似値を求めるための数列 $\{a_n\}$ の漸化式を作ろう。

ニュートン法から，

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

ここで，$f(x)=x^2-2$ より $f'(x)=2x$ なので
よって，

$$a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^2-2}{2a_n}$$
$$=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$$

3　初項 $a_1=2$ として第2項から第5項まで求めてみよう。

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$ より

$$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{a_1}=\frac{3}{2}$$
$$a_3=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{a_2}=\frac{17}{12}$$
$$a_4=\frac{a_3}{2}+\frac{1}{a_3}=\frac{577}{408}$$
$$a_5=\frac{a_4}{2}+\frac{1}{a_4}=\frac{665857}{470832}$$

これより，

$a_2=1.5$
$a_3=1.41666666666$
$a_4=1.41421568627$
$a_5=1.41421356237$

4　初項を自分で設定し（２以外で），第2項から第5項まで求めて，気付いたことをかこう。

$a_1=5$ とすると，

$a_2=2.7$
$a_3=1.720370370$
$a_4=1.414553681$
$a_5=1.414213586$

気付いたこと

第5項で $\sqrt{2}$ の値にかなり近い値になった
初項が２でも５でもすぐに $\sqrt{2}$ に近い値になる

例１では導入として課題学習を行っているため，誘導を丁寧に行っている。そのため，多くの生徒が何を考えて答えればよいか分かりやすくなっていると思われる。実際に第５項まで求めることで，数列が特定の値に収束していくイメージを持ちやすいのではないかと考える。また，初項を様々な値に設定しても，急速に $\sqrt{2}$ に近づいていくことが分かり，ニュートン法のすばらしさに気付くことができるのではないかと考えた。

しかし，設問を細かく設定しているため，生徒の「主体的・対話的で深い学び」として数学的活動を充実させていることができているかという疑問が残る。

例２　ニュートン法について調べ，次の問いを考えよう。

問　数列 $\{a_n\}$ について次のように定める。$f(x)=x^2-2$ とし，関数 $y=f(x)$ 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における接線が x 軸と交わる点を $(a_{n+1}, 0)$ とする。$a_1=2$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2)　すべての自然数 n において，$a_n-\sqrt{2}>0$ であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$ であることを証明せよ。

ニュートン法について調べよう　　　年　組　番　氏名

問　数列 $\{a_n\}$ について次のように定める。$f(x)=x^2-2$ とし，関数 $y=f(x)$ 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における接線が x 軸と交わる点を $(a_{n+1}, 0)$ とする。$a_1=2$ とするとき，次の問いに答えよ。

（1）a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

$f(x)=x^2-2$ より，$f'(x)=2x$ となるので

$$f'(a_n)=2a_n$$

接点 $(a_n, f(a_n))$ であるので，接線の方程式は

$$y-f(a_n)=f'(a_n)(x-a_n)$$

この接線と x 軸の交点の x 座標が a_{n+1} となるので

$$0-f(a_n)=f'(a_n)(a_{n+1}-a_n)$$
$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$
$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$$

（2）すべての自然数 n について，$a_n-\sqrt{2}>0$ であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

［1］$n=1$ のとき

$$a_1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}>0$$

これより，$n=1$ のとき成り立つ

［2］$n=k$ のとき
$a_k-\sqrt{2}>0$ が成り立つと仮定する
このとき，

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}-\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_k^2-2\sqrt{2}a_k+2}{a_k}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_k-\sqrt{2})^2}{a_k}$$

ここで，$a_k>0$，$(a_k-\sqrt{2})^2>0$ であるので，
$n=k+1$ でも成り立つ
［1］，［2］より，n が自然数のとき $a_n-\sqrt{2}>0$ が成り立つ

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$ であることを証明せよ。

$$a_n-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_{n-1}-\sqrt{2})^2}{a_{n-1}}$$
$$=\frac{a_n-\sqrt{2}}{2a_n}(a_n-\sqrt{2})$$

ここで，（2）より
$0<a_{n-1}-\sqrt{2}<a_{n-1}$ となるので
$0<\dfrac{a_{n-1}-\sqrt{2}}{2a_{n-1}}<\dfrac{1}{2}$ となる
これより，

$$0<a_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(a_{n-1}-\sqrt{2})<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{2})$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{2})=0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2})=0$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$ が成り立つ

例２では，極限の単元が終了した後に行うレポートであるため，入試問題等を意識したレポートとなっている。(2)では数学的帰納法を，(3)でははさみうちの原理を用いて証明を行うなど，少し難しい内容を含んでいる。習熟度のあまり高くない生徒に対しては，もう少し誘導等を行う必要があると考える。逆に，習熟度の高い生徒には，学習指導要領解説の例にあるような，３次以上の方程式の解の近似値を求めることを考えさせる設問があってもよいと思われる。

また，これらは長期休業中などに生徒が自由に課題学習のテーマを選んでレポートを提出させる方法で実施する場合でも，テーマの１つとして使うこともできると考える。

(2)　授業で実施する

授業で実施する場合は，極限の単元の授業前に行うか授業後に行うかで，課題学習の内容が異なると考えた。導入として実施する場

合では，生徒が無限数列の収束についてのイメージができるようにするために行う。その内容としては，レポートの例１をベースに行うことができると考える。生徒の反応等を見ながら実施できるため，必要に応じて内容を変更することも可能である。また，タブレット端末を活用することで，その場で，ニュートン法について調べさせたり，近似値計算を電卓機能や表計算ソフトを利用して行ったり，学習指導要領解説の例にあったように実際に方程式の解の近似計算をするプログラムを制作させたりすることもできる。

極限の単元の授業後に行う場合は，導入時で扱うことを考えた，タブレット端末を用いての活動や，レポートの例２のような問題に取り組ませることもできる。こちらも，生徒の反応を見ながら行うことができるので，状況に応じてヒントやさらに発展的な内容の追加なども行うことができる。

また，課題学習を授業で行う場合でも，レポートを併用して行うことで，効率的な授業が実施できると思われる。

4　まとめと考察

数学Ⅲにおける極限について課題学習を行う方法を考えた。今年度は数学Ⅲの授業を担当していなかったため，実践報告とはならなかった。数学Ⅲを履修する生徒は数学に対する興味・関心が高いと思われるので，意欲的に取り組むことができるのではないかと予想される。

来年度入学生から新教育課程が実施される。数学Ⅰから課題学習が行われるため，どのように実施するか，分かりやすく伝えるためにはどうすればよいかなど，実際に課題学習を行いながら研究を継続していく必要がある。数学Ⅱ，数学Ⅲについても，順次検討していかなければならないと思われる。

《参考文献》

・「高等学校学習指導要領」（文部科学省）
・「高等学校学習指導要領解説」（文部科学省）