大学入学共通テストに向けた問題の分析

愛媛県立大洲高等学校　　入田　圭司
愛媛県立松山西中等教育学校　　壷内　智士

1　はじめに

昨年度から大学入学共通テストが実施された。数学Ⅱ・Ｂにおいて出題順の変更はあったが，大問構成に大きな変化はなかった。しかし，問題作成の方針である「日常の事象や，数学のよさを実感できる題材，教科書等では扱われていない数学の定理等を既知の知識等を活用しながら導くことのできるような題材」が多く出題されていたことが特徴である。

今回はその共通テストの分析と一昨年度から研究してきたことを基に作成した問題を紹介したい。

2　問題分析

令和３年度の共通テストは新型コロナウイルス感染症の影響で第１日程と第２日程の２回実施された。今回は受験者数が多かった第１日程の問題をメインに分析を行うこととする。

⑴　数学Ⅰ・Ａ

○　第１問［1］数と式

２次方程式の解に関する問題。試行調査でもおなじみの会話文の形式が出題された。

○　第１問［2］図形と計量

三角形とその各辺の外側に正方形をかいてできる図形を考察する問題。「一度考えた結果を一般化していく」という共通テストの特徴が出ている問題であった。

○　第２問［1］２次関数

100 m走を題材にした問題。 問題作成の方針である「日常の事象や，数学のよさを実感できる題材」に沿った問題であった。問題文が長く，初めて見る用語や関係式に対して立式することができるかがポイントであった。

○　第２問［2］データの分析

都道府県別の各産業の就業者数割合を題材にした問題。平均値や分散，相関係数などの数値を求める問題はなく，データの読み取りが重視されていた。

○　第３問　場合の数と確率

複数の箱からくじを引く試行に関する条件付き確率の問題。会話文の形式で「解決過程の振り返り」という試行調査でも重視されていた問題構成であった。

○　第４問　整数の性質

円周上を動く石について，１次不定方程式を利用して考える問題。平成30年度の試行調査の問題と同様の形式であった。

○　第５問　図形の性質

平面図形に関する問題。従来のセンター試験とは違って誘導が少なく，思考力や図形的考察力が問われる問題であった。

⑵　数学Ⅱ・Ｂ

○　第１問［1］三角関数

三角関数の合成を利用して最大値を求める問題。係数が文字のままであること，余弦を用いた合成が出題されるなど，思考力が問われる問題であった。

○　第１問［2］指数関数・対数関数

指数関数を含む２つの関数について，対話形式で考察していく問題。関数の特徴を考察していく共通テストの特徴が出ている問題であった。

○　第２問　微分法・積分法

２次関数，３次関数のグラフの接線や面積，最大・最小に関する問題。文字を含んだ計算が多く，上手く処理をする力が必要であった。また、試行調査でも出題された関数の特徴を捉えてグラフの概形をイメージする力が問われる問題も出題された。

○　第３問　確率分布と統計的な推測

二項分布や母平均の推定に関する問題。平成30年度の試行調査と同じ読書時間の調査が題材にされていた。選択肢を選ぶ問題では思考力，判断力が問われる内容であった。

従来のセンター試験とは異なり，平成30年度の試行調査と同様，第３問に配置された。学習指導要領の配置順に従ったものと思われる。

○　第４問　数列

等差数列，等比数列，複雑な漸化式を扱った問題。問題作成の方針である「一定の手順に従って数学的に処理すること」に沿った問題であった。

○　第５問　ベクトル

正五角形から正十二面体へと平面から空間へ拡張していく問題。問題作成の方針である「教科書等では扱われていない数学の定理等を既知の知識等を活用しながら導くことのできるような題材」に沿った出題であった。

⑶　その他

試行調査で出題されていたコンピュータによる図形の描写を扱った問題は第１日程では出題されなかったが，第２日程の２次関数の問題で出題されていた。

3　問題例

今回の共通テストの分析や昨年度から研究してきたことを基に作成した問題をいくつか紹介する。

$\boxed{1}$　数列

会話文による誘導形式にしている。多様な解法を学んだり，問題同士の関連を考えながら解く問題にしている。

問題

太郎さんと花子さんは数列の和について話している。二人の会話を読み，下の問いに答えよ。

太郎：今日は Σ を用いた計算について学んだね。

花子：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ の計算がとても興味深かったわ。

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

を用いて計算すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\boxed{\text{イ}}$$

になるわね。

(1) ア に当てはまる数を答えよ。また， イ に当てはまる式を答えよ。

太郎：先生が，分数の和以外にも“差に分ける”ことで様々な和を計算できると言っていたよ。
花子：一般に $\sum_{k=1}^{n}(f(k+1)-f(k))$ の形の和を計算すると， ウ になるっていう話ね。ということは， $f(k)$ をうまく定めることができれば和が計算できるのね。

(2)(i) ウ に当てはまるものを下の選択肢から一つ選べ。

⓪ $f(n)-f(1)$　① $f(1)-f(n)$
② $f(n)-f(2)$　③ $f(2)-f(n)$
④ $f(n+1)-f(1)$　⑤ $f(1)-f(n+1)$
⑥ $f(n+1)-f(2)$　⑦ $f(2)-f(n+1)$

(ii) $S_n=\sum_{k=1}^{n}3^k$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について考える。

エ ， オ ， キ に当てはまる数を答えよ。また， カ に当てはまる式を答えよ。

$$3^k=\frac{1}{\boxed{エ}}(3^{k+1}-3^k)$$
であるから，
$$S_n=\frac{1}{\boxed{オ}}\left(3^{\boxed{カ}}-\boxed{キ}\right)$$
である。

(iii) $T_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について考える。 ク に当てはまる数を答えよ。また， ケ に当てはまる式を答えよ。

$$k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{\boxed{ク}}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$
であるから，
$$T_n=\boxed{ケ}$$
である。

(iv) $U_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について考える。

コ ～ セ の空欄に当てはまる数を答えよ。ただし， ス には当てはまる式を答えよ。

$f(k)=(ak+b)\cdot 3^k$ が
$$k\cdot 3^k=f(k+1)-f(k)\ (k=1,2,3,\cdots)$$
を満たすように定数 a , b の値を定めると，
$$a=\boxed{コ},\ b=\boxed{サ}$$
である。よって，
$$U_n=\frac{\left(\boxed{シ}n-1\right)\cdot 3^{\boxed{ス}}+3}{\boxed{セ}}$$
である。

(v) $U_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について，花子さんは次のように計算できることに気づいた。 ソ に当てはまる式を答えよ。また， タ に当てはまる式を下の選択肢から選べ。ただし， S_n は(2)(ii)で定めたものである。

《花子さんの考え方》
$$(k+1)\cdot 3^{k+1}-k\cdot 3^k=\left(\boxed{ソ}\right)\cdot 3^k$$
である。
$$V_n=\sum_{k=1}^{n}((k+1)\cdot 3^{k+1}-k\cdot 3^k)\ (n=1,2,3,\cdots)$$
とおくと， V_n は求めることができ， U_n を S_n ， V_n で表すと
$$U_n=\boxed{タ}$$
である。

タ の選択肢

⓪ V_n-S_n　① V_n-2S_n　② V_n-3S_n
③ $\frac{1}{2}(V_n-S_n)$　④ $\frac{1}{2}(V_n-2S_n)$　⑤ $\frac{1}{2}(V_n-3S_n)$
⑥ $\frac{1}{3}(V_n-S_n)$　⑦ $\frac{1}{3}(V_n-2S_n)$　⑧ $\frac{1}{3}(V_n-3S_n)$

2 ２次関数

会話文による誘導形式にしている。平行移動・対称移動や１次方程式の解について考察を深める問題にしている。

問題

太郎さんと花子さんが放物線の移動について話し合っている。

太郎： C_1 : $y=x^2$をどう動かしたら，放物線 C_2 : $y=-x^2-6x+2$ と一致するかな？
花子： x^2 の係数が -1 になっているから，まず， C_1 を直線 ア に関して対称移動してみよう。これで，放物線 $y=-x^2$ が得られるよ。
太郎：さらに，放物線 $y=-x^2$ を C_2 に一致するように平行移動したらいいかな。
花子：あ，よく考えたら，遠回りなやり方だったかもしれないね。もっといい方法があるよ。C_1 をある点に関して対称移動したら，一発で C_2 に一致するね。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる式を答えよ。

(2) 次の $\boxed{\text{イ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数を答えよ。

① 放物線 $y=-x^2$ を x 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ ，y 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$ だけ平行移動すると C_2 に一致する。

② C_1 を点 $\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}\right)$ に関して対称移動すると C_2 に一致する。

花子：じゃあ次に，C_1 を点 (a, b) に関して対称移動して得られる放物線 C_3 と C_1 の関係を考えよう。C_1 と C_3 が共有点をもつのは，a と b が $\boxed{\text{カ}}$ を満たすときだね。

太郎：ということは，C_1 を点 $\boxed{\text{キ}}$ に関して対称移動して得られる放物線が C_1 と共有点をもつための a の条件は $-1 \leqq a \leqq 2$ ということだね。

花子：次は平行移動について考えてみよう。C_1 を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる放物線を C_4 とするとき，C_1 と C_4 が共有点をもつのはどういうときかな？

太郎：C_1 と C_4 の方程式から y を消去して整理すると x の方程式$_{(*)}$ になるから，その方程式が実数解をもつときを考えたらいいね。$a=0$ かつ $b=0$ という場合もあることに注意しなければならないね。

花子：$a \neq 0$ かつ $b=a^3+2a$ のときを考えると，C_1 と C_4 の共有点はちょうど 1 つだね。

太郎：いろんな a を考えるときに，その共有点の x 座標の最小値$_{(**)}$ が求められたよ。

(3) $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $b \geqq a^2$　① $b \geqq -a^2$　② $b \leqq a^2$　③ $b \leqq -a^2$

(4) $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ (a, a)　① $(a-1, 3-a)$
② $(a+2, a-2)$　③ $(a, a+3)$

(5) 下線部 $(*)$ の方程式を調べることでわかることとして適切なものを次の ⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ C_1 と C_4 は a, b の値にかかわらず必ず共有点をもつ。
① $a=0$ のとき，C_1 と C_4 は共有点をもたない。
② $b=0$ のとき，C_1 と C_4 は共有点をもつ。
③ C_1 と C_4 の共有点の個数は 1 個以下である。

(6) 下線部 $(**)$ について，共有点の x 座標の最小値を求めよ。

3 図形と計量

余弦定理の証明を題材に三角比の扱い方について考察を深める問題。中線定理や三角形の形状の判別へと発展させる問題にしている。

問題

△ABC に対して，辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，∠CAB , ∠ABC , ∠BCA の大きさをそれぞれ A, B, C とする。

太郎さんと花子さんは △ABC について

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の関係（余弦定理）が成り立つことを知り，その理由について，C から直線 AB に垂線 CH を下ろし，次のように考察した。

(1) まず H が辺 AB 上にある場合を次のように考察した。

H が辺 AB（両端を除く）上にあるとき，直角三角形 ACH において

$$\mathrm{AH}=\boxed{\text{ア}},\quad \mathrm{CH}=\boxed{\text{イ}}$$

であり

$$\mathrm{BH}=c-\boxed{\text{ア}}$$

である。

直角三角形 BCH において，三平方の定理が成り立つことから

$$a^2=\left(\boxed{\text{イ}}\right)^2+\left(c-\boxed{\text{ア}}\right)^2$$

を変形することで $(*)$ の関係が得られる。

$(*)$ は，H が A もしくは B と一致するときにも成り立つ。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $b\sin A$　① $b\cos A$　② $b\tan A$
③ $\dfrac{b}{\sin A}$　④ $\dfrac{b}{\cos A}$　⑤ $\dfrac{b}{\tan A}$

(2) 次に太郎さんと花子さんは，H が辺 AB 上にない場合についても $(*)$ の関係が成り立つことを次のように考察した。

B が鈍角のとき

$$\mathrm{BH}=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

A が鈍角のとき

$$\mathrm{BH}=\boxed{\text{エ}}$$

である。

いずれの場合も，$\mathrm{CH}=\boxed{\text{イ}}$ であるから，(1) の考察と同様にして $(*)$ の関係が得られる。

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $b\sin A+c$　① $b\sin A-c$　② $c-b\sin A$
③ $b\cos A+c$　④ $b\cos A-c$　⑤ $c-b\cos A$

(3) 次に太郎さんと花子さんは $(*)$ の関係を発展させて次のように考察した。

太郎：無事証明できたね。

花子：そういえば，先生が $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ と変形すると，∠BAC が鋭角，直角，鈍角のいずれになるか簡単に判別できると言っていたわ。

太郎：$a>b>c$ とすると，△ABC の最大角は オ だね。このとき，△ABC が鈍角三角形になる条件は カ だね。

（i） オ ， カ に当てはまるものを下の選択肢から一つずつ選べ。

オ の選択肢

⓪ ∠ABC　① ∠BCA　② ∠CAB

カ の選択肢

⓪ $a>b+c$　① $a=b+c$　② $a<b+c$

③ $a^2>b^2+c^2$　④ $a^2=b^2+c^2$　⑤ $a^2<b^2+c^2$

（ii） 次の3辺が与えられた ⓪～⑥ の三角形のうち，鈍角三角形は何個あるか。また，そのうちで最大角が最も大きいものはどれか，⓪～⑥ から一つ選べ。 キ

	a	b	c
⓪	5	4	3
①	4.5	4	3
②	6	4	3
③	13	12	5
④	12.5	12	5
⑤	14	12	5
⑥	32	24	10

(4) さらに，太郎さんと花子さんは，(*) の関係を用いて得られる新たな関係式について次のように考察した。

△ABC において，辺 AB の中点を M とし，線分 AM と線分 CM の長さをそれぞれ x, y とする。

∠CMA＝θ として，三角形 AMC と三角形 MBC に (*) の関係を用いることで

$a^2+b^2=$ ク

が成り立つことが分かる。

ク に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪ x^2+y^2　① $x^2+y^2-2xy\cos\theta$　② $x^2+y^2+2xy\cos\theta$

③ $2(x^2+y^2)$　④ $2(x^2+y^2-2xy\cos\theta)$　⑤ $2(x^2+y^2+2xy\cos\theta)$

⑥ $4(x^2+y^2)$　⑦ $4(x^2+y^2-2xy\cos\theta)$　⑧ $4(x^2+y^2+2xy\cos\theta)$

4 指数関数・対数関数

共通テストの問題作成の方針「日常の事象や，数学のよさを実感できる題材」を意識して作成した。

問題

地震が起こると，地震の開始地点である震源から地震波が地球内部を伝わっていく。地震波には、速度は早いが弱い揺れのＰ波と速度は遅いが強い揺れのＳ波の２種類がある。地震発生と同時に，Ｐ波とＳ波は震源から同時に伝わり始めるが，Ｐ波の方が速く伝わるので，観測点にはＰ波の方が先に到達する。Ｐ波とＳ波の到着時刻の差を初期微動継続時間という。また，震源の真上の地表を震央という。以下の表は，ある地震におけるＰ波とＳ波の到達時刻と震央からの距離をまとめたものである。

観測地点	震央からの距離(km)	Ｐ波の到着時刻	Ｓ波の到着時刻
A	45	5:47:00	5:47:06
B	98	5:47:08	5:47:21
C	134	5:47:14	5:47:32
D	195	5:47:23	5:47:49

(1) Ｄ地点までのＰ波とＳ波の伝わる速度が一定であるとする。初期微動継続時間を x 秒，震央からの距離を y kmとすると，x と y の関係式は，$y=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}x$ と表すことができる。

(2) 地震が発するエネルギーの大きさ E とマグニチュード M とすると，次の関係がある。

$$\log_{10}E=4.8+1.5M$$

$\sqrt{10}=3.16$ であることを用いると，マグニチュードの値が１増加すると地震のエネルギーは約 エ 倍になり，マグニチュードの値が２増加すると，約 オ 倍になる。

エ ， オ に当てはまるものを次の ⓪～⑦から一つずつ選びなさい。

⓪ 1.5　① 3.2　② 15　③ 32

④ 100　⑤ 150　⑥ 320　⑦ 1000

4 おわりに

共通テストの問題を分析した結果，次の３つの力が求められていると感じた。

① 対話形式で議論を進めていく

② 日常の事象や題材を数学を用いて解決していく

③ 問題を一般化していく

加えて，従来通りの計算力や基礎力が必要であり，それらを活用していくことも大切である。また，問題量がかなり増加しているため，出題の意図を短時間で正確に読み取る読解力も求められるようになり，日頃から文章を読む練習も必要である。

来年度入学生から新教育課程となり，３年後の共通テストから数学②は「数学Ⅱ・数学Ｂ・数学Ｃ」に変わるなど，更に変化することが分かっている。その変化に対応できるようにするためにも，今後も研究をしっかりしていきたい。

5 参考文献

・ 大学入学共通テスト　平成29年度試行調査（独立行政法人大学入試センター）

・ 大学入学共通テスト　平成30年度試行調査（独立行政法人大学入試センター）

・ 令和３年度大学入学共通テスト（独立行政法人大学入試センター）