国公立大学入試問題の研究
－通過領域に関する問題の研究－

愛媛県立松山東高等学校　　松　浦　　　正

1　はじめに

本研究では，通過領域に関する入試問題に焦点を当て，昨年の大学入試問題を中心に出題内容と解法について分析を行う。そして、今回の研究結果を今後の教科指導に役立てていきたい。

2　大学入試問題の分析

＜２０２１　鳥取大　理系前期　＞

A は $A>1$ を満たす実数とする。$A \leqq a \leqq A+1$ を満たす実数 a に対し，関数 $f(x)$ を $f(x)=a^x$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ とし，xy 平面上の曲線 C を $C：y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ とする。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　a が $A \leqq a \leqq A+1$ の範囲を動くとき，曲線 C が通過する領域の面積 $S(A)$ を A を用いて表せ。

(3)　(2) で定めた $S(A)$ に関する次の極限 $\displaystyle\lim_{A\to\infty} S(A)\log A$ を求めよ。

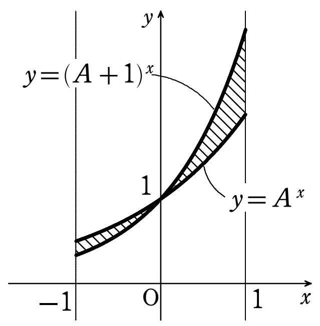
ただし，$\displaystyle\lim_{A\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{A}\right)^A=1$ であることを用いてよい。

【解法の分析】

(2) は，底が変化するときの指数関数のグラフの通過領域を考える問題である。底の大小による関数の値の変化の違いを想像しやすい問題であるため，曲線 C の通過領域をイメージすることは難しくはないだろう。

(1)　$f'(x)=a^x\log a$

(2)　曲線 C が通過する領域は右の図の境界線を含む斜線部分であるから，



$$S(A)=\int_{-1}^{0}\{A^x-(A+1)^x\}dx+\int_{0}^{1}\{(A+1)^x-A^x\}dx$$

$$=\left[\frac{A^x}{\log A}-\frac{(A+1)^x}{\log(A+1)}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{(A+1)^x}{\log(A+1)}-\frac{A^x}{\log A}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{\log A}\left(1-\frac{1}{A}\right)-\frac{1}{\log(A+1)}\left(1-\frac{1}{A+1}\right)+\frac{A+1-1}{\log(A+1)}-\frac{A-1}{\log A}$$

$$=\frac{A^2}{(A+1)\log(A+1)}-\frac{(A-1)^2}{A\log A}$$

(3)　省略

＜２０２１　東北大学　文系後期＞

0 でない実数 a に対して曲線 $y=ax^2+\dfrac{1}{a}$ を C_a とおく。

(1)　直線 ℓ は，0 でないすべての実数 a に対して曲線 C_a と接するとする。このような直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　a を $a \geqq 1$ の範囲で動かしたときに曲線 C_a が通過する領域を図示せよ。

【解法の分析】

a についての 2 次方程式 $x^2a^2-ya+1=0$ 実数解の存在条件に帰着させる定番の解法になる。ただし，$a \geqq 1$ の条件が与えられ，解の存在範囲を考慮しながらの場合分けが必要となる問題であるため注意が必要である。

(1)　$y=2x$，$y=-2x$（答えのみ）

(2)　$y=ax^2+\dfrac{1}{a}$ から，$x^2a^2-ya+1=0$

点 $(x,\ y)$ が C_a の通過する領域に含まれるための必要十分条件は，この a の 2 次方程式が，$a \geqq 1$ の範囲で実数解をもつことである。

[1]　$x=0$ のとき

$ya=1$ より，$a=\dfrac{1}{y}$ であるから，求める条件は，$\dfrac{1}{y} \geqq 1$

すなわち，$0<y \leqq 1$

[2]　$x \fallingdotseq 0$ のとき

$f(a)=x^2a^2-ya+1$ とおくと，

$$f(a)=x^2\left(a-\frac{y}{2x^2}\right)^2+1-\frac{y^2}{4x^2}$$

(i)　$\dfrac{y}{2x^2} \geqq 1$　すなわち，$y \geqq 2x^2$ のとき

求める条件は，$1-\dfrac{y^2}{4x^2} \leqq 0$　　すなわち，$(y+2x)(y-2x) \geqq 0$

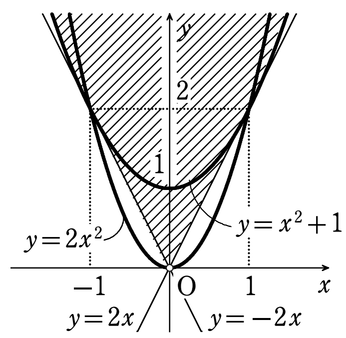
よって，$y \geqq 2x^2$ かつ $y \geqq 2x$ かつ $y \geqq -2x$

(ii)　$\dfrac{y}{2x^2} \leqq 1$ すなわち $y \leqq 2x^2$ のとき

求める条件は　　$f(1) \leqq 0$　　すなわち，$y \geqq x^2+1$

よって，$y \leqq 2x^2$ かつ $y \geqq x^2+1$

[1]，[2] から，曲線 C_a が通過する領域は右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線は含むが，y 軸は $0<y \leqq 1$ の部分のみ含み，$y>1$ の部分は含まない。



＜２０２１　大阪市立大学　理系前期　＞

実数 t に対して，xy 平面上の曲線 C_t：$y=3tx^2-t^3$ を考える。

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 3 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 1 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

【解法の分析】

頂点が y 軸上にある放物線 C_t が，t の値の変化によって凹凸を変化させながら座標平面上を動く様子を，頭の中で通過する回数ごとにイメージすることは非常に難しい。定番である t の方程式の実数解を利用する解法になるが，「実数解を持つ」ではなく，「実数解を 3 個もつ」ときと「実数解を 3 個もつ」ときに分けて考える必要がある。

(1)　$y=3tx^2-t^3$ から，$t^3-3x^2t+y=0$　…… ①

t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 3 回通過するための条件は，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつことである。

$f(t)=t^3-3x^2t+y$ とおくと，

$f'(t)=3t^2-3x^2=3(t+x)(t-x)$

[1]　$x=0$ のとき，$f'(t)=3t^2 \geqq 0$ より $f(t)$ は単調に増加する。

よって，① は異なる 3 つの実数解をもたない。

[2]　$x \fallingdotseq 0$ のとき

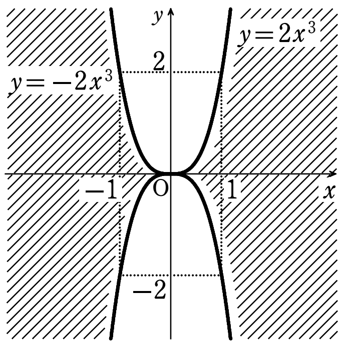
$f'(t)=0$ とすると　　$t=\pm x$

このとき，$f(t)$ は極大値，極小値を 1 つずつもち，それらは，$f(x)$，$f(-x)$である。
よって，① が異なる 3 つの実数解をもつための条件は

$$f(x)f(-x)<0$$
$$(x^3-3x^3+y)(-x^3+3x^3+y)<0$$
$$(y-2x^3)(y+2x^3)<0$$

すなわち，$\begin{cases} y>2x^3 \\ y<-2x^3 \end{cases}$

または，$\begin{cases} y<2x^3 \\ y>-2x^3 \end{cases}$



以上から，求める領域は図の斜線部分である。
ただし，境界線は含まない。

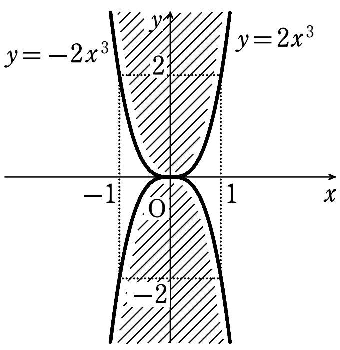
(2)　t が実数全体を動くとき，
曲線 C_t がちょうど 1 回通過するための条件は，t の 3 次方程式 ① がただ 1 つの実数解をもつことである。

[1]　$x=0$ のとき，$f'(t)=3t^2\geqq 0$ より $f(t)$ は単調に増加する。また，$f(t)=t^3+y$ はすべての実数値をとり得る。
よって，① はただ 1 つの実数解をもつ。

[2]　$x\fallingdotseq 0$ のとき
$f(t)$ は極大値，極小値を 1 つずつもち，それらは $f(x)$，$f(-x)$ である。
よって，① がただ 1 つの実数解をもつための条件は
$f(x)f(-x)>0$，$(y-2x^3)(y+2x^3)>0$

すなわち，$\begin{cases} y>2x^3 \\ y>-2x^3 \end{cases}$

または，$\begin{cases} y<2x^3 \\ y<-2x^3 \end{cases}$



以上から，求める領域は図の斜線部分である。ただし，原点は含み，原点を除いた境界線は含まない。

＜　２０２１　大阪市立大学　理系後期　＞

xy 平面上の原点 O を通る直線 ℓ を考える。ℓ 上の 2 点 P と Q は次の 3 条件を満たすとする。

(i)　2 点 P，Q の x 座標，y 座標はすべて 0 以上である。
(ii)　線分 OP と線分 OQ の長さの積は 1 である。
(iii)　点 P と直線 $x=1$ との距離は，線分 OP の長さに等しい。

x 軸の正の部分と線分 OQ のなす角を θ とする。

(1)　線分 OQ の長さを θ を用いて表せ。
(2)　θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するときに，線分 OP が通過する部分の面積を S，線分 OQ が通過する部分の面積を T とする。S と T の値をそれぞれ求めよ。

【解法の分析】
極座標平面上で考えていくという発想が必要である。

(1)　O を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標を考え，2 点 P，Q の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta)$，$(r_2,\ \theta)$ とおくと，

(i) から，$r_1>0$，$r_2>0$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

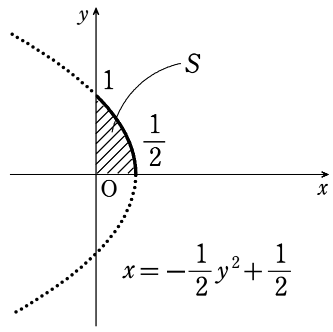
(ii) から，$r_1r_2=1$

(iii) より，点 P の x 座標は 1 より小さいから，$1-r_1\cos\theta=r_1$

よって，$r_1=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

したがって，$\mathrm{OQ}=r_2=1+\cos\theta$

(2)　点 P の軌跡の極方程式は，$r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，
$r(1+\cos\theta)=1$
よって，$r=1-r\cos\theta$
両辺を 2 乗すると，
$r^2=1-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta$
$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ を代入して
整理すると，
$x=-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$



したがって，$S=\displaystyle\int_0^1\left(-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)dy$

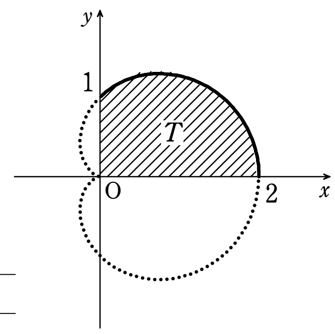
$$=\left[-\frac{y^3}{6}+\frac{y}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

点 Q の軌跡の極方程式は $r=1+\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，
$x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta$，
$y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta$

よって，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dx}{d\theta}<0$ であるから，

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において
x は θ に関して単調に減少する。
また，$\theta=0$ のとき $x=2$，
$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $x=0$ であり，
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y\geqq 0$ である。



したがって，

x	$0\longrightarrow 2$
θ	$\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$T=\displaystyle\int_0^2 y\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1+\cos\theta)\sin\theta\{-\sin\theta(2\cos\theta+1)\}d\theta=\ \cdots\cdots\ =\frac{3}{8}\pi+1$$

＜２０２１　東京大学　文理共通＞

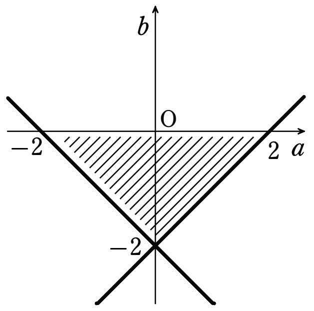
a，b を実数とする。
座標平面上の放物線 C：$y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

【解法の分析】
(1) は 2 次方程式の解の配置を考える典型的な問題である。判別式，端点の符号，軸の位置に注意して考えていく。(2) は動かすパラメータが 2 つあるので，放物線の動きの様子を把握することが困難である。したがって，逆像法ではなく，順像法により x の値を固定し，y の値域を求める。

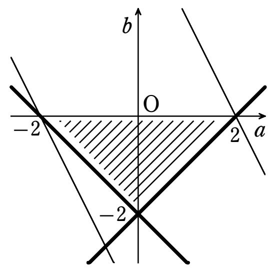
(1)　$y=x^2+ax+b$ と $y=-x^2$ から y を消去して，
$x^2+ax+b=-x^2$　　すなわち，$2x^2+ax+b=0$　……①
ここで，$f(x)=2x^2+ax+b$ とおく。
C と放物線 $y=-x^2$ が $-1<x<0$ の範囲と $0<x<1$ の範囲にそれぞれ 1 つずつ共有点をもつための必要十分条件は，方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<0$ の範囲と $0<x<1$ の範囲にそれぞれ 1 つずつ実数解をもつことである。
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める必要十分条件は，

$f(-1)>0$，$f(0)<0$，$f(1)>0$
がすべて成り立つことである。
$f(-1)>0$ から，$b>a-2$
$f(0)<0$ から，$b<0$
$f(1)>0$ から，$b>-a-2$
これらが表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線上の点を含まない。

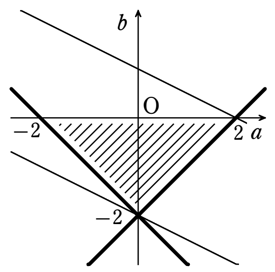


(2)　(1) で求めた領域を D とおく。
X，Y を定数とみなしたとき，点 $(X,\ Y)$ が放物線 C の通りうる範囲に存在するための必要十分条件は，$Y=X^2+aX+b$ を満たすような D 内の点が存在すること，すなわち，D と $b=-Xa+Y-X^2$　…… ② が共有点をもつことである。
② は ab 平面上で，傾きが $-X$，b 切片が，$k=Y-X^2$ である直線を表す。直線 ② が点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ を通るような k の値はそれぞれ，$k=-2X$，$2X$，-2

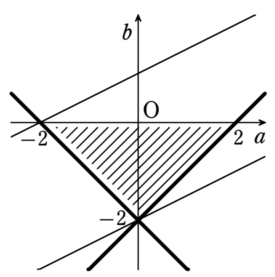
[1]　$-X\leqq-1$ すなわち $X\geqq1$ のとき
k のとりうる値の範囲は
$-2X<k<2X$
よって X，Y の満たすべき条件は
$X^2-2X<Y<X^2+2X$

[1]


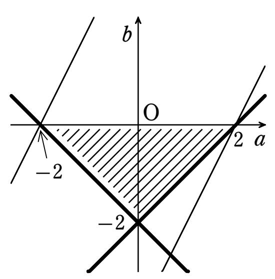
[2]　$-1<-X\leqq0$ すなわち
$0\leqq X<1$ のとき
k のとりうる値の範囲は
$-2<k<2X$
よって X，Y の満たすべき条件は
$X^2-2<Y<X^2+2X$

[2]


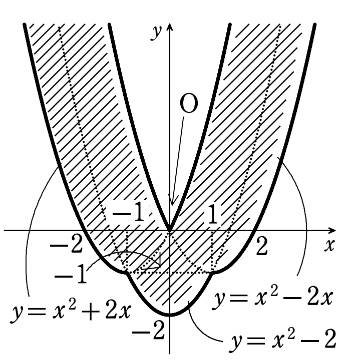
[3]　$0<-X\leqq1$ すなわち
$-1\leqq X<0$ のとき
k のとりうる値の範囲は
$-2<k<-2X$
よって X，Y の満たすべき条件は
$X^2-2<Y<X^2-2X$

[3]


[4]　$-X>1$ すなわち
$X<-1$ のとき
k のとりうる値の範囲は
$2X<k<-2X$
よって，X，Y の満たすべき条件は
$X^2+2X<Y<X^2-2X$

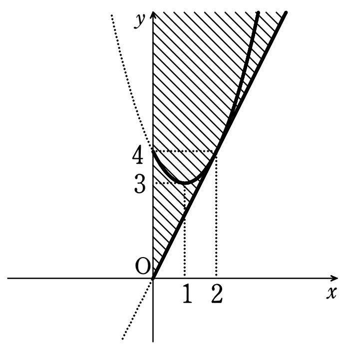
[4]


[1]～[4] から，点 $(X,\ Y)$ の存在しうる領域，すなわち放物線 C の通りうる範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線は含まない。



＜　２０２０　東京大学　文系＞
　O を原点とする座標平面において，放物線 $y=x^2-2x+4$ のうち，$x\geqq0$ を満たす部分を C とする。
(1)　点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。
(2)　実数 a に対して，直線 ℓ：$y=ax$ を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。
（条件）C 上の点 A と ℓ 上の点 B で，3 点 O，A，B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

【解法の分析】
　半直線の動きがイメージしやすい問題である。（接点の x 座標を t とおくと，t の値が大きくなるにつれ，半直線は右方向に傾いていく）
(1)　原点 O を通り，放物線に接する直線の方程式を $y=bx$ とする。
$y=x^2-2x+4$ と連立して y を消去すると，x の 2 次方程式
$x^2-2x+4=bx$ は $x\geqq0$ の範囲に重解をもつ。
$x^2-2x+4=bx$ を整理すると，$x^2-(b+2)x+4=0$　…… ①
① の判別式を D とすると，
$D=\{-(b+2)\}^2-4\cdot1\cdot4=(b-2)(b+6)$
① が $x\geqq0$ の範囲に重解をもつための条件は，
$D=0$ かつ 放物線 $y=x^2-(b+2)x+4$ の軸 $x=\dfrac{b+2}{2}$ について，
$\dfrac{b+2}{2}\geqq0$ となることである。
$D=0$ から，$b=2,\ -6$ …… ②
$\dfrac{b+2}{2}\geqq0$ から，$b\geqq-2$ …… ③
②，③ から，$b=2$
このとき，重解は，$x=2$
したがって，求める領域は，
$x\geqq0$ かつ $y\geqq bx$，すなわち，
$b=2$ から $x\geqq0$ かつ $y\geqq2x$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の集合であり，右図の斜線部分のようになる。
ただし，境界線を含む。



(2)　省略

＜２０２０　東京大学　理系①＞
　$-1\leqq t\leqq1$ を満たす実数 t に対して，$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$，
$y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える。
(1)　$-1<t\leqq1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。
(2)　原点と P の距離を $f(t)$ とする。$-1\leqq t\leqq1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。
(3)　t が $-1\leqq t\leqq1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ。

【解法の分析】
　領域 D を回転させることにより，D の通過してできる新たな領域の面積を求める内容である。回転の向きに注意して落ち着いて計算を行うように注意したい。
(1)，(2) のは省略。
(3)　$x'(t)=\sqrt{1+t}+(1+t)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{1+t}$

$y'(t)=3\left\{\sqrt{1-t}+(1+t)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)\right\}=\dfrac{3(1-3t)}{2\sqrt{1-t}}$

$-1<t<1$ において，$x'(t)>0$

$y'(t)=0$ とすると，$t=\dfrac{1}{3}$

よって，$-1\leqq t\leqq 1$ における $x(t)$，$y(t)$ の増減表は右のようになる。したがって，C の概形は図1のようになる。
また，原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させたときに D が通過する領域は，図2の斜線部分である。
斜線部分は図3のように3つの図形に分けられる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$x'(t)$		$+$	$+$	$+$	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\rightarrow$	$2\sqrt{2}$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\downarrow$	0

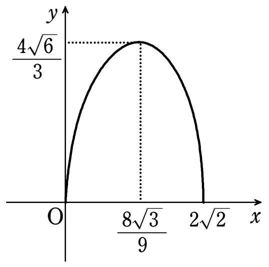


図1

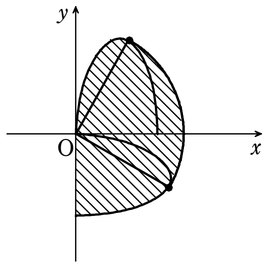


図2

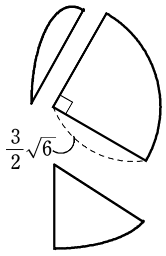


図3

斜線部分の面積を S とおき，D の面積を S_1 とおくと

$$S=S_1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots ①$$

また，$S_1=\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}y(t)\,dx$

$dx=x'(t)dt$ より

$$S_1=\int_{-1}^{1}y(t)\,x'(t)\,dt=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt$$
$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$=\frac{9}{2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt\right)\quad\cdots\cdots ②$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は原点を中心とする半径1の円のうち，x 軸の上側にある半円の面積に等しいから，

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots ③$$

また，$t\sqrt{1-t^2}$ は奇関数であるから，

$$\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=0\quad\cdots\cdots ④$$

① ～ ④ より，$S=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)+\dfrac{27}{8}\pi=\dfrac{45}{8}\pi$

<２０２０　東京大学　理系②>

　座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径1の円を考える。この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐 (内部を含む) を S とする。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

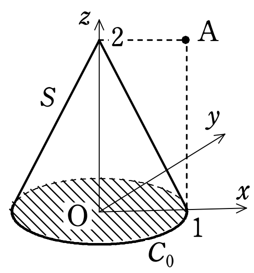
(1)　点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

【解法の分析】

(2) は (1) と同様の発想で考えていく。切断面の面積を t を用いて表し，それを区間 $0\leqq t\leqq 2$ で積分する。

(1)　S の底面は，$z=0$ 上の点 $(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径1の円である。この円を C_0 とする。円錐 S の $z\geqq 1$ の部分を S' とすると，S と S' は相似であり，相似比は，$1:\dfrac{1}{2}$

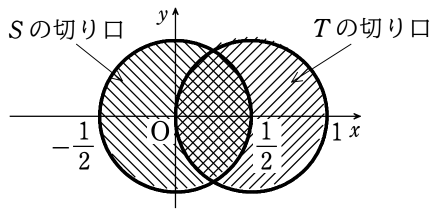


よって，平面 $z=1$ による S の切り口は，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円である。

線分 AO と平面 $z=1$ の交点は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$

よって，平面 $z=1$ による T の切り口は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円である。

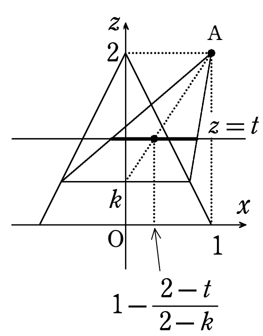
これらを同一平面上にかくと，次の図のようになる。



(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分を D とおき，その体積を V とおく。また，D を平面 $z=t\ (0\leqq t<2)$ で切った切り口を D_t とおき，その面積を $f(t)$ とおく。線分 AP が平面 $z=t$ と共有点をもつとき，P の z 座標は0以上 t 以下である。円錐 S と平面 $z=k\ (0\leqq k\leqq t)$ の共通部分を C_1 とすると，C_0 と C_1 は相似であり，相似比は，

$1:\dfrac{2-k}{2}$

よって，C_1 は中心 $(0,\ 0,\ k)$，半径 $\dfrac{2-k}{2}$ の円である。P が円 C_1 上を動くとき，線分AP と平面 $z=t$ の交点の存在する範囲を C_2 とする。点 O_k を $(0,\ 0,\ k)$ とすると，線分 AO_k と平面 $z=t$ の交点は，$\left(1-\dfrac{2-t}{2-k},\ 0,\ t\right)$



よって，C_2 は円であり，その中心は

$\left(1-\dfrac{2-t}{2-k},\ 0,\ t\right)$ で，半径は，$\dfrac{2-k}{2}\cdot\dfrac{2-t}{2-k}=\dfrac{2-t}{2}$

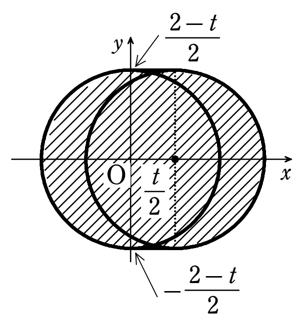
k が $0\leqq k\leqq t$ の範囲を動くとき，円 C_2 の半径は一定である。
円 C_2 の中心の x 座標は k の増加に伴って減少し，

$$1-\frac{2-t}{2}=\frac{t}{2},\ 1-\frac{2-t}{2-t}=0$$

であるから，最大値は $\dfrac{t}{2}$，

最小値は0である。

領域 D_t は，k が $0\leqq k\leqq t$ の範囲を動くときに円 C_2 が通過する領域であり，右の図の斜線部分のようになる。



したがって，

$$f(t)=\left(\frac{2-t}{2}\right)^2\pi+(2-t)\cdot\frac{t}{2}$$

よって，$V=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$

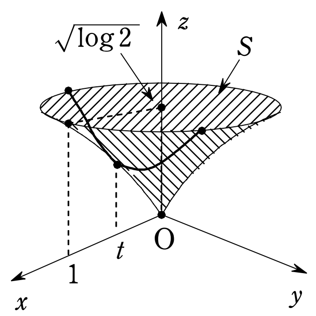
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^2(t-2)^2\,dt-\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)\,dt$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}(t-2)^3\right]_0^2-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(2-0)^3=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}$$

＜２０２０　京都大学　理系前期＞

x，y，z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線 $z=\sqrt{\log(1+x)}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を z 軸の周りに１回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする。この S をさらに x 軸の周りに１回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする。このとき，V の体積を求めよ。

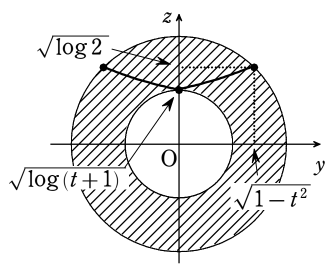
【解法の分析】

グラフを Z 軸中心に回転させた図形 S をさらに x 軸中心に回転させてできる立体 V の体積を求める問題である。立体 V の概形は考わからないとえる必要はなく，図形 S を「切ってから回す」という手順を理解していればやるべきことは見えてくる問題である。しかし，図形 S を x，y，z の関係式としてどのように表現すればよいかがわからないと難しい問題である。



xz 平面内の曲線 $z=\sqrt{\log(x+1)}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を z 軸の周りに１回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形 S は，右の図のようになる。この S をさらに x 軸の周りに１回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体が V である。V を平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの切り口は，S を平面 $x=t$ で切ったときの切り口を，x 軸の周りに１回転させてできる図形である。

よって，V を平面 $x=t$ で切ったときの切り口は，右の図のようになる。



したがって，V を平面 $x=t$ で切ったときの切り口の面積 S_t は

$$S_t=\pi\left\{\sqrt{(\sqrt{1-t^2})^2+(\sqrt{\log 2})^2}\right\}^2-\pi\{\sqrt{\log(t+1)}\}^2$$

$$=\pi\{1-t^2+\log 2-\log(t+1)\}$$

また，V は平面 $x=0$ に関して対称である。

よって，V の体積は，

$$2\int_0^1 S_t\,dt=2\pi\int_0^1(1-t^2+\log 2)dt-2\pi\int_0^1\log(t+1)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\log(t+1)dt=\int_0^1(t+1)'\log(t+1)dt$

$$=\Big[(t+1)\log(t+1)\Big]_0^1-\int_0^1 dt=2\log 2-1$$

したがって，V の体積は，

$$2\pi\left[(1+\log 2)t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1-2(2\log 2-1)\pi$$

$$=2\pi\left(\frac{2}{3}+\log 2\right)-2(2\log 2-1)\pi$$

$$=\left(\frac{10}{3}-2\log 2\right)\pi$$

３　おわりに

今回の研究を通して，大学入試において通過領域を出題する大学の数はそれほど多くないことがわかった。特に，理系学部で出題されるのがほとんどであった。しかし，東京大学では頻繁に出題される傾向があるため，難関大学志望者にはしっかり演習させておく必要があるだろう。内容的にも，直線や曲線の通過領域が簡単に想像できるものから，変化するパラメータ数の多い問題やある図形（軌跡）を動かしたときの通過領域の面積や体積を求める問題までと，出題される問題のレベルもさまざまである。１人１台端末を活用しながら，生徒が点や図形が動く様子を頭の中で想像し，問題を解くための方針や答案作成力身に付くような指導法を今後も研究していきたい。

【参考文献】

2021 年受験用　全国大学入試問題正解〔国公立大編〕　（旺文社）

2020 年受験用　全国大学入試問題正解〔国公立大編〕　（旺文社）