

令和3年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立新居浜西高等学校 松本 慎

1 はじめに

今年度は5月15日(土)にオンラインで愛媛大学理学部平野幹教授による令和3年度愛媛大学入試問題の解説があった。実際の入試問題を利用して、本校生徒がどの問題でどのような間違いをするのか、誤答分析を中心に考察していきたい。なお、筆者のミスで解説のメモを紛失してしまい、教授コメントが掲載できてないが、ご容赦願いたい。

2 出題の傾向

(1) 問題数および試験時間

今年度はセンター試験から大学入学共通テストに変わった影響からか、2次試験も大きく変化した。全ての学部で記述3題の設定で、教育学部、農学部、工学部文理型においては100分で、理学部、工学部理型、医学部医学科においては120分で、総問題数は6題(昨年度までは8題)に減少している。また、医学部医学科の問題が工学部理型、理学部と同じ問題になったのは大きな変化だと思われる。後期は小問1題、記述2題を120分で解答する形であった。前後期ともに小問、中間レベルが多くなった印象である。

(2) 出題内容

<前期>

教育学部(「数Ⅰ、数Ⅱ、数A、数B」受験者)
農学部、工学部文理型

- ① 小問集合(数学A・Ⅱ・B)
- ② 小問集合(数学Ⅰ・A・Ⅱ)
- ③ 図形と方程式、数列

教育学部(「数Ⅰ、数Ⅱ、数Ⅲ、数A、数B」受験者)

- ② 小問集合(数学Ⅰ・A・Ⅱ)
 - ③ 図形と方程式、数列(数学Ⅱ・B)
 - ④ 小問集合(数学A・Ⅱ・Ⅲ)
- 理学部、工学部理型、医学部
- ④ 小問集合(数学A・Ⅱ・Ⅲ)
 - ⑤ 小問集合(数学A・Ⅱ・Ⅲ)
 - ⑥ ベクトル・微分法(数学B・Ⅲ)

<後期>

- ① 小問集合(穴埋め)(数学B・Ⅲ)
- ② 小問集合(数Ⅱ・Ⅲ)
- ③ 確率、複素数平面

(3) 出題者の意図

2次試験数学入試のポイント

1. 基本的な事項が理解できているか。
2. 基本的な計算が身に付いているか。
3. 応用力を身に付けているか。
4. 論理的に考察し、表現できるか。

の4つの観点で問題が作成されているのは、例年通りである。前述したが、小問集合が多く、より基礎の定着を図る問題が多かったのではなかろうか。

3 問題分析

本校の3年生に入試問題を解いてもらった。

普通科理系の生徒(34名)に①, ②, ③を、数学Ⅲ選択者(25名)に④, ⑤, ⑥と後期の①, ②, ③を解いてもらい誤答例から分析を行った。

<前期>

① 小問集合(数学A・Ⅱ・B)

以下の問いに答えよ。

(1) i を虚数単位とする。 $(1+\sqrt{3}i)^5 - \{1+(\sqrt{3}i)^5\}$ の実部を求めよ。

(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ で、 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$,

$\sin \beta = \frac{1}{5}$ のとき、 $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

(3) $a > 0$ とする。座標空間における3点A($a, 0, 0$), B($0, 3, 0$), C($0, 0, 4$)について、 $\angle ABC = 60^\circ$ となる a の値を求めよ。

(4) 曲線 $y = x^3 - x^2 - 2x$ と x 軸とで囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

(5) 1辺の長さが1の正方形ABCDがある。頂点A, B, C, Dを移動する点Pは、1回の移動で、今いる頂点から他の3つの頂点のいずれかへ移動する。ただし、距離が $\sqrt{2}$ 離れた頂点へ移動する確率は $\frac{1}{5}$ で、他の2つの頂点へ移動する確率はそれぞれ $\frac{2}{5}$ である。点Pが頂点Aを出発するとき、3回の移動でちょうどAに戻る確率を求めよ。

【誤答例】

(1) 展開したときの符号ミス。ド・モアブルの定理を使って 2^5 の計算ミス。

(2) $\cos \beta$ の符号ミス。

(3) 成分表示ができず、内積の値を出せなかった。 $\angle BAC = 60^\circ$ と間違えた。余弦定理を使って計算ミスなど。

(4) 積分した後の計算ミス。 $y' = 0$ の x を積分区間にしていた。因数分解を間違えたなど。

(5) 条件を満たす場合を正確に出せなかった。

【考察】

(1) は数Ⅲ選択者はド・モアブルの定理を使っている生徒がほとんどであった。数Ⅲを選択していない生徒は、二項定理か分配法則で展開している人がいたが、全部展開しようとしていたためミスが目立った。

(2) は正答率が高く、三角関数の公式はうまく使えていた。

(3) は成分表示がうまくできていない解答が目立った。また、余弦定理で解こうとして、計算ミスをしている生徒が多かった。

(4) は積分した後の分数の処理でミスがあった。正確に計算させたい。

(5) は3回でAに戻る場合がうまく出せてない生徒が多かった。具体的に考える練習の必要性を感じた。

② 小問集合 (数学 I・A・II)

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n は6で割ると5余るとする。このとき、 $n^3 + 1$ は18の倍数であることを示せ。

(2) 座標平面において、不等式

$(x + y - 1)(x^2 + y^2 - 2y - 1) \geq 0$ の表す領域を図示せよ。

(3) 等式 $|x| + |1 - 2x| = 3$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(4) 導関数の定義にしたがって、関数

$f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{2}$ の導関数を求めよ。

【誤答例】

(1) $n = 6k + 5$ (k は自然数) とおいている。合同式を用いて $n^3 + 1$ を6の倍数と3の倍数として18の倍数としている。

(2) 展開をして、グラフがかけてない。

(3) 場合分けはできているが、解の吟味ができてない。

(4) 定義を覚えていない。 $\lim_{h \rightarrow 0}$ が途中で消えている。

【考察】

(1) は大体の生徒が $n = 6k + 5$ とおいていたが、この形なら、 k は0以上の整数だが、自然数とおっている解答が目立った。 $n = 6k - 1$ とおいた方が計算量も少なく、ミスが減ると思われる。状況に応じて使い分けをさせていきたい。

(2) は正答率が高かったが、展開するとどうしようもないので注意させたい。

(3) は解の吟味ができてない生徒がおり、場合分けとセットで考えられるように指導していく必要を感じた。

(4) は公式を用いて微分することはできるが、定義の定着は不足していると感じた。数Ⅲ選択者は特に

注意したい。

③ 図形と方程式、数列 (数学 II・B)

(1) a, b を正の定数とし、座標平面上の2点A, Bの座標を、それぞれ $(a, 0), (0, b)$ とする。線分AB上のA, Bとは異なる点 $P(x, y)$ を考える(図1)。座標が $(x, y), (0, y), (0, 0), (x, 0)$ である4点を頂点とする長方形の面積を S とする。

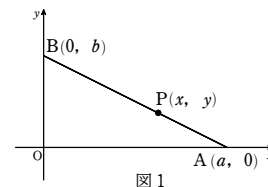


図1

(i) S を a, b, x を用いて表せ。

(ii) S が最大となるときの点 P の座標、および、そのときの S を a, b を用いて表せ。

(2) 座標平面上の2点 P_0, Q の座標を、それぞれ $(1, 0), (0, 3)$ とする。点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ および、実数 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ を次のように定める。

自然数 n に対し、点 P_{n-1} が定められたとき、 P_{n-1} の座標を (x_{n-1}, y_{n-1}) とする。線分 $P_{n-1}Q$ 上の P_{n-1}, Q とは異なる点 $P(x, y)$ を考える。座標が $(x, y), (0, y), (0, y_{n-1}), (x, y_{n-1})$ である4点を頂点とする長方形の面積が最大となるときの点 P を P_n とし、そのときの面積を S_n とする。

(i) S_1, S_2 を求めよ。

(ii) 数列 S_n の一般項を求めよ。

(iii) $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ を n を用いて表せ。

(iv) $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n > 1 - 10^{-11}$ となる最小の n を求めよ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ を用いてよい。

【誤答例】

(1) (i) y を消去できてない。

(ii) $0 < x < a$ を考えてない。

(2) (i) (1) とうまくつながってない。

(ii) P_n の座標を (x_n, y_n) とおき、計算ミス。

(iii) (ii) ができてないため無答が多かった。

(iv) $\log_{10} 2 = 0.301$ で近似して答えている解答がほとんどだった。

【考察】

(1) で面積の最大値を考えさせ、(2) でその図形を繰り返して作っていき、規則性を用いて考えてさせる問題であった。(1) は正答率は高かったが、(2) で S_n を求められるかが分かれ目であった。筆者もそうだったが、座標で漸化式を作ると計算が煩雑になるので、

図形の相似から面積の漸化式を作りたい。(iv)は誤答例にもあるように不等式で挟めてない生徒がほとんどだったので今後練習が必要であると感じた。

4 小問集合 (数学 A・II・III)

以下の問いに答えよ。

- (1) 不定積分 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_1^e (3x^2+2x)\log x dx$ を求めよ。
- (3) 2つの曲線 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$, $y = x^2 - 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (4) i を虚数単位とし, $\alpha = \cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14}$ とする。 $k=1, 2, 3, \dots, 27$ のうち, $(\alpha^k)^8 = 1$ となる k をすべて求めよ。
- (5) 100 未満の正の整数全体の集合を全体集合 U とし,
 $A = \{n \mid n \in U, n \text{ は } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る整数}\}$
 $B = \{n \mid n \in U, n \text{ は偶数}\}$
とする。このとき, 集合 $A \cup \overline{B}$ の要素の個数を求めよ。ただし, \overline{B} は U に関する B の補集合とする。
- (6) 1 の (5) と同じ

【誤答例】

- (1) $x = \tan \theta$ とおいて計算している。
- (2) 部分積分ができてない。部分積分はできているが, そのあと計算ミス。
- (3) 求める面積の図が見えていない。積分区間が出せてない。
- (4) $k = \frac{7}{4}n$ (n は自然数) で終わっている。
- (5) $n(A)$ や $n(B)$ の個数を間違えている。。

【考察】

(1) は置換積分法の問題で, 大体の生徒が $t = 1 + x^2$ とおいて解いていた。一人だけ $t = \sqrt{1+x^2}$ とおいて解いていて, これだと $dt = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ となり, 簡単に解ける。 $t = \tan \theta$ とおくと, 積分区間がないため, $\cos \theta$ の符号の場合分けが必要であるが, そこまでの解答は見受けられなかった。

(2) は部分積分法の問題で, 正答率は高かった。

(3) は積分して面積を求めるが, グラフから共有点を考えるため, 計算で出せなくて困っている解答があった。また, 図形の対称性なども利用できるのに, 今後の指導に生かしていきたい。

(4) はド・モアブルの定理を使う問題で, 正答率は高かった。

(5) は 100 未満というところで, 要素の個数がずれ

ていたり, 求める集合を間違っている生徒が見受けられたのが残念であった。

5 小問集合 (数学 A・II・III)

以下の問いに答えよ。

- (1) 2 の (1) と同じ
- (2) 2 の (2) と同じ
- (3) p を実数の定数とし, 次の式で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。
 $a_1 = 2, a_{n+1} = pa_n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$
数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。さらに, この数列が収束するような p の値の範囲を求めよ。
- (4) $x > 0$ のとき, $6\log x \leq 2x^3 - 9x^2 + 18x - 11$ が成り立つことを示せ。

【誤答例】

- (3) $p = 1$ の場合分けができてない。計算ミス。
- (4) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 18x - 11 - 6\log x$ とおいたあと, $f'(x)$ の整理ができてない。

【考察】

(3) は $p = 1$ で普通に割っている解答が多く, 残念であった。今後指導の必要を感じた。

(4) は $f'(x)$ の処理がうまくできていない解答が多かった。そんなに複雑な計算ではないので, 意外であった。

6 ベクトル・微分法 (数学 B・III)

四面体 OABC は,

$$AB = AC = OB = OC = 1, 0 < \angle BOC = \angle ABO < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする (図 2)。以下では,

$$x = \sin \frac{\angle BOC}{2} \text{ とおき, } \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c} \text{ とする。以下の問いに答えよ。}$$

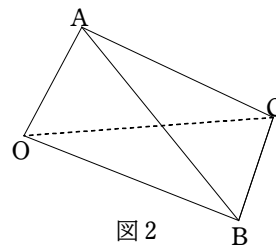


図 2

- (1) 次の に適する値を x を用いて表せ。
 - (i) 辺 BC の長さは ア であり,
 $\cos \angle BOC =$ イ である。
 - (ii) 内積について, $\vec{b} \cdot \vec{c} =$ ウ, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ エ,
 $\vec{a} \cdot \vec{c} =$ オ である。
- (2) s を $0 < s < 1$ を満たす実数とする。辺 BC を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし, A から直線

- OPに下ろした垂線と直線OPの交点をHとする。
- (i) 線分OPの長さを s と x を用いて表せ。
- (ii) $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k を s と x を用いて表せ。
- (iii) $s = \frac{1}{2}$ のとき、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ であることを示せ。
- (3) 四面体OABCの体積を V とする。
- (i) V を x を用いて表せ。
- (ii) $\angle BOC$ が $0 < \angle BOC < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 V の最大値を求めよ。また、 V が最大となるとき、平面OBCと平面ABCのなす角 α を求めよ。ただし、 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

【誤答例】

- (1) (i) 余弦定理で、 BC^2 を BC としている。
 $\sin \angle BOC = 2x$ としている。
- (ii) $\cos \angle AOB$ が求められてない。
- (2) (i) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を間違えていて、計算が合わない。
 $|\overrightarrow{OP}|^2$ で終わっている。
- (ii) (i)と同様、内積の値が違うので、合わない。計算ミス。
- (iii) $OH \perp BC$ を示している。
- (3) 無答や時間不足で途中で終わっている解答がほとんどであった。

【考察】

条件の $\frac{\angle BOC}{2}$ の意図を捉えていない解答が目立った。 $\triangle OBC$ は二等辺三角形なので、中線を引き直角三角形にすればいいのだが、半角の公式で $\cos \angle BOC$ を求めており、 $\cos \angle OBC$ も余弦定理を使って求めているので、時間不足であったと思われる。また、文字計算の処理が多いため、計算ミスも多く見受けられた。今後の練習が必要であると感じた。

<後期>

① 小問集合(穴埋め)(数学B・Ⅲ)

次の□に適する数を、解答用紙の指定のところに記入せよ。

- (1) $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$ とする。大きさが1のベクトル \vec{u} が \vec{a} , \vec{b} の両方に垂直で、 $\vec{u} \cdot \vec{c} < 0$ を満たすとき、 $\vec{u} = (\square \text{ア}, \square \text{イ}, \square \text{ウ})$ である。
- (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan x} = \square \text{エ}$ である。

- (3) 2つの微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$, および、それらの導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ が $f(0) = 1$, $g(0) = 2$, $f'(0) = 3$, $g'(0) = 4$, $f'(1) = 5$, $g'(1) = 6$, $f'(2) = 7$, $g'(2) = 8$ を満たすとす。このとき、合成関数 $h(x) = g(f(x))$ の導関数 $h'(x)$ について、 $h'(0) = \square \text{オ}$ である。

- (4) a を実数の定数とする。関数 $f(x) = \frac{3x-2}{4x+a}$ の逆関数が $f(x)$ に等しいとき、 $a = \square \text{カ}$ である。

- (5) 媒介変数表示が $x = \cos \theta - 2\sin \theta$, $y = 6\cos \theta + 3\sin \theta$ で与えられる2次曲線の方程式が、定数 a, b, c, d を用いて、 $ax^2 + bx + y^2 + cy = d$ と表されるとき、 $a = \square \text{キ}$, $b = \square \text{ク}$, $c = \square \text{ケ}$, $d = \square \text{コ}$ である。

- (6) 1辺の長さが1の正六角形を D_1 がある。 D_1 の各辺の中点を頂点とする正六角形を D_2 とする。続けて、 D_2 の各辺の中点を頂点とする正六角形を D_3 とする。以下同様に、正六角形 D_n の各辺を頂点とする正六角形 D_{n+1} とする。正六角形 D_n の周の長さを a_n とするとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \square \text{サ}$ である。

【誤答例】

- (1) 3元1次連立方程式が解けていない。 $\vec{u} \cdot \vec{c} < 0$ を吟味していない。
- (2) 置換積分法ができてない。
- (3) $h'(x)$ が出せていない。 $h'(0) = g'(f(0)) + f'(0)$ としている。
- (4) 誤答なし
- (5) $\sin \theta$, $\cos \theta$ を x, y で表せていない。
- (6) 公比が $\frac{1}{2}$ になっている。1辺の長さの無限級数を考えている。

【考察】

答のみの小問集合であるが、誤答分析するため解き方も確認した。(3)では答はあっているが、 $f'(x)$, $g'(x)$ が2ずつ増加しているのに、1次関数で考え答を出している解答が見受けられた。答のみなので有効な考え方ではあるが、記述ではあまり点数がもらえないと思われる。(4)も最初に値域を確認せず、 $4y-3$ で割っていた。

② 小問集合(数Ⅱ・Ⅲ)

以下の問いに答えよ。

- (1) 1辺の長さが r で、対角線のうちの1つの長さが r^2 のひし形を考える。このひし形の面積が最大になるときの r の値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x) = |\cos x|$ は、 $x = \frac{\pi}{2}$ において微分可

能でないことを示せ。

(3) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^x 2\sin t dt \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^x \tan t dt \text{ を示せ。}$$

(4) 2つの整数 a, b が $a \log_2 3 = b$ を満たすとき、 $a = b = 0$ であることを示せ。

【誤答例】

- (1) 直角三角形で考えるとき、対角線の長さを $\frac{1}{2}$ にしていない。
- (2) 微分係数の定義が使えてない。場合分けで絶対値を外している。
- (3) 筆者が出題ミスで積分区間の x を π としたため、分析できず。
- (4) $\log_2 3$ が無理数なので、 $a = b = 0$ のみとしている。 $a < 0$ のときを考えていない。

【考察】

記述の小問集合であった。(2)は筆者もそうであったが、場合分けで絶対値を外して極限をとって、極限が一致しないとして証明している解答が多かった。証明は定義を使って証明しないといけないようである。(4)も無理数の話からだ論点がずれて証明としては点数はなさそうであった。

③ 確率、複素数平面 (数学 A・Ⅲ)

以下の問に答えよ。

- (1) 実数 x を表す数直線上の点を点 x という。数直線上を動く点 P が、はじめ点 1 にいるとする。1枚の硬貨を1回投げるたびに、出た結果に応じて、次の規則で P は動く。 P が点 x にいるとき、硬貨の表が出れば P は点 $2x$ に移動し、硬貨の裏が出れば P は点 $3x$ に移動する。
 - (i) 108 を素因数分解せよ。
 - (ii) 硬貨を5回投げて P が移動し終わったとき、 P が点 108 にいる確率を求めよ。
 - (iii) 硬貨を5回投げて P が移動し終わったとき、点 0 から P のいる点までの距離が 40 以上 120 未満である確率を求めよ。
- (2) i を虚数単位とする。複素数 z を表す複素数平面上の点を点 z という。複素数平面上を動く点 Q が、はじめ点 1 にいるとする。1枚の硬貨を1回投げるたびに、出た結果に応じて、次の規則で Q は動く。 Q が点 z にいるとき、硬貨の表が出れば Q は点 $2z$ に移動し、硬貨の裏が出れば P は点 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z$ に移動する。
 - (i) $-2 = 2^m \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^n$ を満たす 0 以上 10 以下の整数 m, n の組 (m, n) をすべて求めよ。

- (ii) 硬貨を10回投げて Q が移動し終わったとき、 Q が点 -2 にいる確率を求めよ。
- (iii) 方程式 $|z+5|=5$ が定める円を複素数平面上に図示せよ。
- (iv) 硬貨を10回投げて Q が移動し終わったとき、 Q が (iii) の円の内部にいる確率を求めよ。

【誤答例】

- (1) (i), (ii) は誤答なし
(iii) 条件を満たす場合を間違えている。強権を満たす場合がいきなり出ている。
- (2) (i) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ 。 m と n を入れ替えた形も答えている。
(ii) (i) を間違えて影響を受けている。
(iii) 中心が $-5i$ になっている。

【考察】

反復試行の確率で、(1)は数直線上を、(2)は複素数平面上を点が移動する問題であった。どちらも(i), (ii)は誘導してくれているので正答率は高かった。(1)(iii)や(2)(iv)の条件を満たす場合の整理ができてなかったり、検討が不十分な解答が目立った。最初に n 回出たときの点の位置を n で表す必要があると思われる。指導する際に注意していきたい。

4 おわりに

共通テストに変わった影響か、新型コロナウイルスで休校する学校が多かったことの配慮なのか分からないが、出題の傾向が大きく変わっていた。ただ、出題の意図は基本的な力が身に付いているか、応用問題や論理的に解答を作ることができるかを問う形になっているのは変わらないので、まずは教科書の内容をしっかり定着させる指導をしていくことが大切だと感じた。小問集合も後期の①以外は解法の過程を記述させる形である。教授の話では、解答はかなり細かいところまで見てくれているようなので、教科書の練習問題から記述の指導をしっかり行う指導が必要であると感じた。本校生徒も自己分析するいい経験になったと思われる。

前期の③、⑥や後期の③のように誘導してくれている問題では、出題の意図を読み取ることで解答の流れが作れるのだが、あまり意識せず力づくで解いている解答も見受けられた。共通テストや入試問題を通して、読解力を身に付けさせる指導をしていき、社会に出て通用する力を身に付けさせたい。