大学入試研究委員会

本研究委員会は，継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれて努力を続けてきました。本年度からは８名の研究員で構成されています。
大学入試センター試験に関してのアンケートにつきましては，県下の受験生や先生方のご協力をいただき，本年度も集計・分析を終え報告する運びとなりました。ありがとうございました。
先生方のご意見，ご指導をいただき，今後の研究活動に生かして生きたいと思いますので，よろしくお願いします。
本年度の研究一覧は以下の通りです。

１　国公立大学入試問題の研究
　－授業での実践を通して－
　愛媛県立今治西高等学校　青木　将彦

２　中四国の国公立大学入試問題の研究
　－ＡＯ・推薦入試の問題から－
　愛媛県立今治北高等学校　宮田　誠
　愛媛県立宇和島南中等教育学校　川野　星子

３　平成２５年度大学入試センター試験アンケートの分析
　愛媛県立三島高等学校　脇　智城
　愛媛県立新居浜西高等学校　青野　洋介
　愛媛県立松山東高等学校　兵頭　道淳

４　平成２５年度愛媛大学入試問題（数学）の研究
　愛媛県立松山南高等学校　近藤　弘法

５　高知工科大学入試問題（数学）の研究
　愛媛県立新居浜東高等学校　藤田　祥夫

国公立大学入試問題の研究

―授業での実践を通して―

愛媛県立今治西高等学校　青木　将彦

１　はじめに

今年度授業を担当している本校２年生の文系生徒と３年生の理系生徒を対象にして，中国・四国地区における国立大学を中心とした入試問題を研究授業で演習する機会に恵まれた。
特に１・２年生は，日ごろの授業で大学入試問題を扱う機会はあまりなく，早い段階から実態を知らせ，大学入試へ向けて意識させなければならないことを痛感した。
また，３年生は，中国・四国地区国立大学の前期試験の傾向を分析した上で，本校生徒の実態に合った２題の入試問題を事前に解かせ，生徒の答案を分析した上で，授業で解説を試みた。

２　事例１「２年生文系クラスでの実践」

(1)　実施時期　　７月中旬

(2)　演習テーマ

「三角比・三角関数に関する大学入試問題に挑戦しよう！」

(3)　概要

教科書レベルの三角関数を学習した後，生徒の実態を考慮して，45 分間かけて以下の問題に挑戦させた。問題のねらいは，次のとおりである。

$\boxed{1}$ 2013 年度　センター試験　数学Ⅱ　本試験（一部）
加法定理や２倍角の公式を利用して，三角関数を含むやや複雑な式を変形できる力を試した。

$\boxed{2}$ 2013 年度北海道大学　数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ前期試験
$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形できる力を試した。また，三角関数の最大・最小の問題について変数を置き換えることで，２次関数の最大・最小の問題として帰着させ，考察できる力も試した。

$\boxed{3}$ 2012 年度広島大学　数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ　前期試験
三角比や三角関数が図形への諸問題で応用できる力を試した。また，数学的な考察を通して，論理的な答案を作成する能力も試した。

(4)　出題した問題

$\boxed{1}$ (1)　次の ＿＿ に正しい数式を記せ。

$\sin(\alpha+\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\sin(\alpha-\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\cos(\alpha+\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\cos(\alpha-\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\sin 2\alpha =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\cos 2\alpha =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ (2)　a を $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数

$$f(x) = \sin(x-2a) + \sin(x-a) + \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a)$$

とする。加法定理を用いると

$f(x) = (\boxed{ア} + \boxed{イ}\cos a + \boxed{ウ}\cos 2a)\sin x$　　となる。

さらに，２倍角の公式を用いると

$f(x) = (\boxed{エオ} + \boxed{カ}\cos a + \boxed{キ}\cos^2 a)\sin x$　　となる。

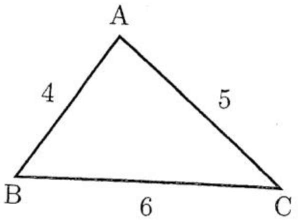
$\boxed{2}$ $f(x) = \sqrt{2}\sin x\cos x + \sin x + \cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$
とする。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ。

(2) t の取り得る値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある。



次の問いに答えよ。

(1) $45° < \angle B < 60°$ を証明せよ。

(2) $\angle A = 2\angle C$ を証明せよ。

(3) $40° < \angle C < 45°$ を証明せよ。

⑸ 解答

$\boxed{1}$ (1) 次の ＿＿ に正しい数式を記せ。

$\sin(\alpha+\beta) = \underline{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

$\sin(\alpha-\beta) = \underline{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$

$\cos(\alpha+\beta) = \underline{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

$\cos(\alpha-\beta) = \underline{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

$\sin 2\alpha = \underline{2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\cos 2\alpha = \underline{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\underline{= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

（評価の観点）数多く練習させ，確実に習得させる。

（関心・意欲・態度）

$\boxed{1}$ (2) 加法定理を用いると，

$f(x) = (\sin x\cos 2a - \cos x\sin 2a) + (\sin x\cos a - \cos x\sin a) + \sin x + (\sin x\cos a + \cos x\sin a) + (\sin x\cos 2a + \cos x\sin 2a)$

$= 2\sin x\cos 2a + 2\sin x\cos a + \sin x$

$= (1 + 2\cos a + 2\cos 2a)\sin x$

また，２倍角の公式を用いると，

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ だから

$f(x) = \{1 + 2\cos a + 2(2\cos^2 a - 1)\}\sin x$

$= (-1 + 2\cos a + 4\cos^2 a)\sin x$

（評価の観点）加法定理や２倍角の公式を利用して，三角関数の式を変形することができる。

（数学的な技能）

$\boxed{2}$

(1) $t = \sin x + \cos x$ を２乗すると，

$t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x$

すなわち，$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

したがって，$f(x) = \sqrt{2}\cdot\frac{t^2-1}{2} + t = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $t = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ である。

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq 2\pi + \frac{\pi}{4}$ となるから，

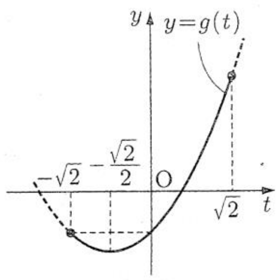
$-1 \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ である。

したがって，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(3) (1)(2) より，$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(t + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ である。

グラフは次のとおり



$t = \sqrt{2}$ で最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

そのときの x の値は，$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ より

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

条件から，$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ だから，$x = \frac{\pi}{4}$

また，$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値 $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$

そのときの x の値は，$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

条件から，$x + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$ だから，$x = \frac{11}{12}\pi$，$\frac{19}{12}\pi$

したがって，

$x = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$x = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$ で最小値 $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$

（評価の観点）$a\sin\theta+b\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する方法を理解している　（知識・理解）
変数をおき換えることで，三角関数を含む関数の最大値･最小値を考察することができる。
（数学的な見方や考え方）

（評価の観点）余弦定理を利用することができる。
（知識・理解）
２倍角の公式を利用して，三角関数の値を求めることができる。
（知識・理解）

3

(1)　ΔABC において，余弦定理から

$$\cos\angle B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$$

$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt2}, \cos 60°=\frac{1}{2}$　であり，$0°<\theta<90°$ において，$\cos\theta$ は単調に減少する。

すると，$\frac{1}{\sqrt2}=\frac{8\sqrt2}{16}=\frac{\sqrt{128}}{16}$，$\frac{9}{16}=\frac{\sqrt{81}}{16}$ だから

$\frac{1}{\sqrt2}>\frac{9}{16}$　となり，$\cos 45°>\cos\angle B$　… ①

また，$\frac{9}{16}>\frac{1}{2}$　だから $\cos\angle B>\cos 60°$　… ②

したがって，① ② から
$\cos 60°<\cos\angle B<\cos 45°$ となるので，

$$45°<\angle B<60°$$

(2)　ΔABC において，余弦定理から

$$\cos\angle A=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

$$\cos\angle C=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$$

ここで，$\cos 2\angle C=2\cos^2\angle C-1=2(\frac{3}{4})^2-1=\frac{1}{8}$

となるので，$\cos\angle A=\cos 2\angle C$
ここで，$\angle A$ と $\angle C$ は，鋭角である。
すなわち，$\angle A=2\angle C$

(3)　$\angle A+\angle B+\angle C=180°$ より，
$\angle C=180°-\angle A-\angle B$
さらに，(2)から　$\angle C=180°-2\angle C-\angle B$
$3\angle C=180°-\angle B$　より

$$\angle C=60°-\frac{1}{3}\angle B$$

ここで，(1)より，$\frac{45°}{3}<\frac{1}{3}\angle B<\frac{60°}{3}$　となり，

$-20°<-\frac{1}{3}\angle B<-15°$ である。

したがって，$60°-20°<60°-\frac{1}{3}\angle B<60°-15°$

となり，$40°<\angle C<45°$

(6) 正誤表・誤答分析

対象生徒：２年生文系 38 名

1 2013 年度　センター試験　数学Ⅱ　本試験（一部）
〈 正誤表 〉　（単位：%）

	（1）	（2）
正 答	86	45
誤 答	12	11
無 答	2	44

〈 主な誤答例 〉

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta\sin\alpha$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\beta\sin\alpha$
$\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$
$\sin 2\alpha=2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$(1+\sin^2\alpha)$
$(\cos^2\alpha-1)$

(2)
- $\sin(x-2a)+\sin(x-a)+\sin(x+a)+\sin(x+2a)$の計算はできているが，$\sin x$ を加え忘れている生徒がいた。
- $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ を代入している。
- $\cos(-2a)$，$\sin(-2a)$ の計算ができない。

2 2013 年度北海道大学　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B前期試験
〈 正誤表 〉　（単位：%）

	（1）	（2）	（3）
正 答	29	18	3
誤 答	47	21	34
無 答	24	61	63

〈 主な誤答例 〉

(1)
- $\sin x\cos x=\sqrt2\cdot\frac{t^2-1}{2}=\frac{\sqrt2t^2-1}{2}$
- $f(x)=\frac{t^2-1}{\sqrt2}+t=t^2+\sqrt2t-1$

(2)　$-1\leqq\sin x\leqq1$ かつ$-1\leqq\cos x\leqq1$ だから，
t の取り得る値の範囲は，$-2\leqq t\leqq2$

(3)
- 関数 $f(x)$ の平方完成ができていない。

$f(x)=\frac{1}{\sqrt2}(t-\frac{1}{\sqrt2})^2-\frac{1}{3\sqrt2}$，$f(x)=\frac{1}{\sqrt2}(t+\frac{\sqrt2}{4})^2-\frac{7\sqrt2}{16}$

・ ⑵で定義域の設定ができていないので，最大値を求めることができない。

・最小値をとるときの x の値が計算できていない。

$\boxed{3}$ 2012 年度広島大学　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B　前期試験

〈 正誤表 〉　（単位：%）

	（1）	（2）	（3）
正 答	18	39	11
誤 答	61	24	8
無 答	21	37	81

〈 主な誤答例 〉

⑴ ・ 余弦定理を用いて，$\cos\angle B$ の値を求めた後の解き方が分かっていない。

・「$\cos 45° > \cos\angle B > \cos 60°$ から $45° < \angle B < 60°$」の説明が不十分である。

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{128}}{16}$$

$$\cos\angle B = \frac{9}{16} = \frac{\sqrt{81}}{16}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{8}{16} = \frac{\sqrt{64}}{16}$$

すなわち，$\frac{\sqrt{128}}{16} > \frac{\sqrt{81}}{16} > \frac{\sqrt{64}}{16}$ となり，

$\cos 45° > \cos\angle B > \cos 60°$ だから $45° > \angle B > 60°$

⑵ ・ $\cos A = \frac{1}{6}$

・ ２倍角の公式が利用できていない。

・ $\cos 2\angle C = 2\cos^2\angle C - 1$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{8}{8} = 1$$

⑶ ・ どのように解けばよいのか方針を立てられない。

・ $\cos 45° < \cos 40° < \cos 30°$ だから $\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos 40° < \frac{\sqrt{3}}{2}$

⑺ 授業を実践しての所感

教科書を学習した直後の２年生文系クラスにとっては，レベルの高い授業となった。文系生徒に分かりやすいようにするため，教科書レベルの基本事項をかみ砕いて丁寧に説明したことにより，中間レベル層までの生徒は理解できたようである。実際にトップ層の生徒は，完答できており，教科書や問題演習の学習がそのまま入試に直結することが理解できたのではないかと思う。生徒への刺激を通して，学習へのモチベーションを向上させ，新たな目標を持たせる意味でも有益であったと考える。

３　事例２「３年生理系クラスでの実践」

⑴ 実施時期　10 月下旬

⑵ 演習テーマ

「中国・四国地区国公立大学における数学Ⅲ・Cの実践演習」

⑶ 概要

数学Ⅲ・Cの学習と基礎的な演習をひと通り終えた後，生徒の実態を考慮して，50 分間かけて以下の問題に挑戦させた。問題のねらいは，次のとおりである。

$\boxed{1}$ 2013 年度岡山大学　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・C　前期試験

関数の増減，極大・極小が，導関数と関連させて調べられる力と具体的な図形の考察を通して，微分の有用性を認識し，活用できる力を試した。

$\boxed{2}$ 2013 年度広島大学　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・C　前期試験

方程式や不等式を関数的視点でとらえ，微分法を利用して解決できる力と積分法の有用性を認識し，図形の求積などに活用できる力を試した。

⑷ 出題した問題

$\boxed{1}$ x, y 平面において，点（$1, 2$）を通る傾き t の直線を l とする。また，l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

⑴ 点 P の座標を t を用いて表せ。

⑵ 点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

⑴ $x \geqq 2$ のとき，$x^4e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ。また，これを用いて $\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}$ を求めよ。

⑵ k を定数とする。$x > 0$ の範囲で方程式 $xe^{-3x} = \frac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ。

⑶ ⑵のα, β が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y = xe^{-3x}$ $(x > 0)$ と曲線 $y = \frac{k}{x^2}$ $(x > 0)$ で囲まれた部分の面積

を求めよ。

⑸ 解答

$\boxed{1}$

(1) 直線 l の方程式は，$l : y - 2 = t(x-1)$ より，

$$y = t(x-1) + 2 \cdots ①$$

また，l と垂直な直線の傾きは，$-\frac{1}{t}$ であり，

原点を通る直線 m の方程式は，$m : y = -\frac{1}{t}x \cdots ②$

① ，②から，点 P の x 座標は，

$$t(x-1) + 2 = -\frac{1}{t}x$$

$$x = \frac{t(t-2)}{t^2+1}$$

また，点 P の y 座標は，②に代入して，

$$y = -\frac{1}{t} \cdot \frac{t(t-2)}{t^2+1} = \frac{2-t}{t^2+1}$$

したがって，P $\left(\frac{t(t-2)}{t^2+1}, \frac{2-t}{t^2+1}\right)$

(2) t の値と交点 P は，1 対 1 に対応する。

P (x, y) とおくと，$x = \frac{t(t-2)}{t^2+1} \ldots ③, y = \frac{2-t}{t^2+1} \ldots ④$

点P は 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ 上にあるから，

$$2\left\{\frac{t(t-2)}{t^2+1}\right\}^2 - a \cdot \frac{2-t}{t^2+1} = 0$$

$$2t^2(t-2)^2 + a(t^2+1)(t-2) = 0$$

$$(t-2)\{2t^3 + (a-4)t^2 + a\} = 0$$

$t - 2 = 0$ または $2t^3 + (a-4)t^2 + a = 0 \cdots ⑤$

すると，$t = 2$ のとき，P $(0, 0)$ となり，原点が 1 つ目の共有点の座標であることがわかる。

一方 $t \neq 2$ のとき，⑤において，$a = -\frac{2t^2(t-2)}{t^2+1}$ から，

$y = a \cdots ⑥$

$y = f(t) = -\frac{2t^2(t-2)}{t^2+1} = -2t + 4 + \frac{2t-4}{t^2+1} \cdots ⑦$

と表すことができ，条件を満たすためには，⑥と⑦が異なる 2 つの共有点をもてばよい。

⑦において，$f'(t) = -2 + \frac{2(t^2+1) - 2t(2t-4)}{(t^2+1)^2}$

$$= -\frac{2t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}$$

ここで，$t^2 + t + 4 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ だから，

$f'(t) = 0$ を解くと，$t = 0, 1$

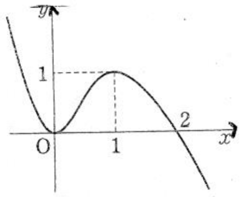
t	・・・	0	・・・	1	・・・
$f'(t)$	−	0	＋	0	−
$f(t)$	↘	0	↗	1	↘

また，$\lim_{t \to \infty}\{y - (-2t+4)\} = \lim_{t \to \infty} \frac{2t-4}{t^2+1} = 0$

$\lim_{t \to -\infty}\{y - (-2t+4)\} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2t-4}{t^2+1} = 0$ より

漸近線は，$y = -2t + 4$

グラフは，次のとおり



したがって，$a \neq 0$ だから $a = 1$ である。

このとき，対応する t の値は，⑤に代入して，

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$$

$(t-1)^2(2t+1) = 0$ となり，

$$t = -\frac{1}{2}, 1$$

つまり，2 つ目と 3 つ目の共有点の座標は，

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 2)$$

すなわち，$a = 1$ で 3 つの共有点の座標は，

$$(0, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 2)$$

$\boxed{2}$

(1) $f(x) = x^4 e^{-3x}$ $(x \geqq 2)$ とおく。

$$f'(x) = 4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = x^3 e^{-3x}(4 - 3x)$$

ここで，$x \geqq 2$ のとき，$x^3 > 0$，$e^{-3x} > 0$，$4 - 3x < 0$ だから，常に $f'(x) < 0$ となり，関数 $f(x)$ は，単調に減少する。

$x = 2$ で最大値 $2^4 e^{-3 \cdot 2} = 16e^{-6}$ をとるので，

$x \geqq 2$ のとき，$x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ となり，示せた。

また，$x \geqq 2$ のとき，常に $x^4 e^{-3x} > 0$ だから，

$$0 < x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$$

すると，$0 < x^3 e^{-3x} \leqq \frac{16e^{-6}}{x}$ となり，

$\lim_{x \to \infty} \frac{16e^{-6}}{x} = 0$ だから，

はさみうちの原理により，$\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-3x} = 0$

(2) $xe^{-3x} = \frac{k}{x^2}$ を変形して，$k = x^3 e^{-3x}$

$x>0$ のとき，$y=k$ … ①

$$g(x)=y=x^3e^{-3x} \cdots ②$$

とおくと，① と ② が異なる 2 つの共有点をもてばよい。

② において，$g'(x)=3x^2e^{-3x}(1-x)$

$x>0$ より，$g'(x)=0$ を解くと，$1-x=0$ から

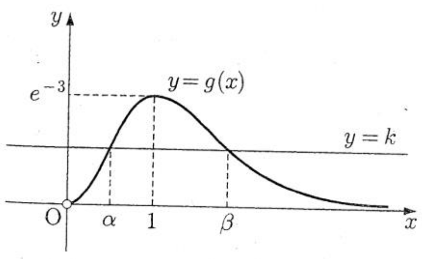
$x=1$

x	0	・・・	1	・・・
$g'(x)$		＋	0	－
$g(x)$		↗	$\frac{1}{e^3}$	↘

また，(1)より，$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}=0$ であり，

$\lim_{x\to+0} x^3e^{-3x}=0$ だから，漸近線は，$y=0$

グラフは，次のとおり



したがって，$0<k<\frac{1}{e^3}$

(3) 共有点の x 座標が $\alpha, 2\alpha$ であるから，共有点の y 座標に着目すると，

$$\begin{cases} \alpha e^{-3\alpha}=\dfrac{k}{\alpha^2} \cdots ③ \\ 2\alpha e^{-3\cdot 2\alpha}=\dfrac{k}{(2\alpha)^2} \cdots ④ \end{cases}$$

② より，$k=\alpha^3e^{-3\alpha}$ として，④ に代入すると，

$k=(2\alpha)^3e^{-6\alpha}$ より，$\alpha^3e^{-3\alpha}=8\alpha^3e^{-6\alpha}$ となり，

$$\alpha^3e^{-3\alpha}(1-8e^{-3\alpha})=0$$

ここで，$\alpha>0$ だから，$\alpha^3e^{-3\alpha}>0$ より

$1-8e^{-3\alpha}=0$ すなわち，$8e^{-3\alpha}=1$

$$(2e^{-\alpha})^3=1$$

$2e^{-\alpha}>0$ だから，$2e^{-\alpha}=1$ となり，$e^{-\alpha}=\frac{1}{2}$

よって，$-\alpha=\log\frac{1}{2}$ となり，$-\alpha=-\log 2$

したがって，$\alpha=\log 2$

つまり，共有点の x 座標は，$\log 2$, $2\log 2$ である。

また，このときの k の値は，$k=(\log 2)^3e^{-3\log 2}$

すなわち，$k=(\log 2)^3e^{\log 2^{-3}}=2^{-3}(\log 2)^3=\frac{(\log 2)^3}{8}$

ここで，$\log 2 \leqq x \leqq 2\log 2$ において，常に

$xe^{-3x} \geqq \frac{k}{x^2}$ だから，求める面積 S は，

$$S=\int_{\alpha}^{2\alpha}\left(xe^{-3x}-\frac{k}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{xe^{-3x}}{3}+\frac{k}{x}\right]_{\alpha}^{2\alpha}+\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-3x}}{3}dx$$

$$=-\frac{2\alpha e^{-6\alpha}}{3}+\frac{\alpha e^{-3\alpha}}{3}-\frac{k}{2\alpha}-\frac{1}{9}[e^{-3x}]_{\alpha}^{2\alpha}$$

$$=-\frac{2\alpha e^{-6\alpha}}{3}+\frac{\alpha e^{-3\alpha}}{3}-\frac{k}{2\alpha}-\frac{1}{9}e^{-6\alpha}+\frac{1}{9}e^{-3\alpha}$$

$$=-\frac{1}{9}e^{-6\alpha}(1+6\alpha)+\frac{1}{9}e^{-3\alpha}(1+3\alpha)-\frac{k}{2\alpha}$$

$\alpha=\log 2$, $k=\frac{1}{8}(\log 2)^3$ を代入する。

$e^{-3\alpha}=2^{-3}=\frac{1}{8}$, $e^{-6\alpha}=2^{-6}=\frac{1}{64}$ だから

$$S=-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64}(1+6\log 2)+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}(1+3\log 2)-\frac{(\log 2)^3}{8\cdot 2\log 2}$$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8^2}(1+6\log 2)+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}(1+3\log 2)-\frac{1}{16}(\log 2)^2$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8^2}\{-(1+6\log 2)+8(1+3\log 2)\}-\frac{1}{16}(\log 2)^2$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8^2}(7+18\log 2)-\frac{1}{16}(\log 2)^2$$

$$=-\frac{1}{16}(\log 2)^2+\frac{1}{32}\log 2+\frac{7}{576}$$

(6) 正誤表・誤答分析

対象生徒：３年生理系 34 名

$\boxed{1}$ 2013 年度　岡山大学　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・C
前期試験

〈 正誤表 〉　　(単位：%)

	(1)	(2)
正 答	47	0
誤 答	44	44
無 答	9	56

〈 主な誤答例 〉

(1) ・ 直線 l の方程式の立式が誤っている。

$y-1=t(x-2)$

・ 直線 l に垂直で原点を通る直線 m の方程式の立式

が y = −tx と誤っている。

・ x についての方程式 $t(x-1)+2=-\frac{1}{t}x$ が解けない。

・ 点 P の x 座標 は求めているが，y 座標の計算が誤っている。

⑵ ⑴ を正解した 16 名を対象とした。

・ 点 P を (x,y) とおく。

$x=\frac{t^2-2t}{t^2+1}$, $y=\frac{-t+2}{t^2+1}$ で $x=-t\cdot\frac{2-t}{t^2+1}$ より，$t=-\frac{x}{y}$

は導いているが，その後の解き方が分からない。

・ 方程式 $2(t-2)t^2+a(t^2+1)=0$ が $t\neq 2$ の２重解をもてばよいことに気付いているが，その後の解き方が分からない。

・ 点 P の軌跡の方程式 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$ を求めた後，正しい図を答案にかいているが，a の値の求め方が分からない。

$\boxed{2}$ 2013 年度広島大学　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・C
前期試験

〈 正誤表 〉　（単位 : %）

	（1）	（2）	（3）
正 答	9	35	0
誤 答	50	6	15
無 答	41	59	85

〈 主な誤答例 〉

⑴ ・ はさみうちの原理を用いずに，$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}=0$

を直感で求めている。

・ $x\geq 2$ において，関数 f(x) が単調に減少することの説明が不十分である。

・ f(2) の計算をしていない。

⑵ ・ $y=x^3e^{-3x}$ の微分の計算が誤っている。

$y'=3e^{-3x}(x^2-3x^3)$ ， $y'=3x^2e^{-3x}-3x^4e^{-3x}$

(3) ・$\alpha=\log 2$ を求め，$S=\int_\alpha^{2\alpha}\left(xe^{-3x}-\frac{k}{x^2}\right)dx$ から後の計算ができていない。

・ S の計算が誤っている。

$$S=\left[-\frac{x}{3}e^{-3x}\right]_\alpha^{2\alpha}+\int_\alpha^{2\alpha}\frac{e^{-3x}}{3}\,dx+\left[\frac{k}{2x^2}\right]_\alpha^{2\alpha}$$

⑺ 授業を実践しての所感

2013 年度における数学Ⅲの入試問題を最後まで完答するには，かなりの計算力が必要であったと思われる。
問題演習で学習したような典型的な問題を除き，方程式の実数解の個数と図形的な関連性に対する数学的な考察力が 10 月下旬では，まだまだ発展途上であったようだ。答案作成のポイントとグラフの動きについて，実際に視聴覚機器を活用して，生徒に見せた。生徒の頭の中には，イメージが鮮明に残り，図形が動く問題に対する考察力が高まったのではないか。

4　おわりに

両大学とも高次方程式，指数・対数，部分積分法を用いてしっかりと計算させており，解答の指針を早めに定めないと，制限時間内に消化できなかったようである。平素から，“計算力の向上”と“図形的な問題に対する思考力の向上”を意識した授業を展開する必要性を感じた。

【参考文献】

2014 年度受験用　全国大学入試問題正解　数学
［国公立大編］（旺文社）