

国公立大学の入試問題の研究
 - 複素数平面を扱う入試問題の研究 -

愛媛県立宇和島南中等教育学校 黒田 利信

1 はじめに

私は現在、高校2年生理系クラスの担任をしており、もうすぐ数学Ⅲを指導する予定である。数学Ⅲであれば、計算量が比較的多い微分法や積分法の演習に多くの時間を要する。そのため、数学Ⅲの中でも複素数平面は、授業の中で簡単に終わらせてしまう分野の一つである。その理由として、教科書のページ数が少なく、複雑な計算も少ないことが挙げられる。また、私は教師になってから、複素数平面を指導した経験が数回しかないため、正直なところ、あまり得意ではない。さらに、各大学の最近の入試傾向や問題の難易度をあまり把握できていない。しかし、それらの理由で、指導や演習が不十分になり、生徒が受験で不利益を被ることは避けなければならない。

以上のことから、自分自身も複素数平面についての理解を深め、各大学の出題傾向や難易度を把握することで、受験を見据えた指導ができるようにしたいと思い、今回の研究を行った。

2 大学入試問題の研究

(I) 図形の方程式や三角形の角度などを扱う問題

<2020年 筑波大学 前期日程>

i は虚数単位とする。複素数 z に対して、その共役な複素数を \bar{z} で表す。複素数平面上で、次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\bar{z} + (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 9 = 0$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 図形 C を複素数平面上に描け。
- (2) 複素数 w に対して、 $\alpha = w + \bar{w} - 1$, $\beta = w + \bar{w} + 1$ とする。 w , α , β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P , A , B とする。点 P は C 上を動くとする。 $\triangle PAB$ の面積が最大となる複素数 w , およびそのときの $\triangle PAB$ の外接円の中心と半径を求めよ。

(略解)

- (1) 与えられた等式を変形すると、 $|z+1-3i|^2=1$ によって、図形 C は、中心が $-1+3i$, 半径1の円である。
(図形の図示は省略)

- (2) 点 $P(w)$ は円 C 上にあるので、 $w = (-1+3i) + (\cos\theta + i\sin\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と表せる。このとき、 $\alpha = 2\cos\theta - 3$, $\beta = 2\cos\theta - 1$ から、 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ は実軸上にあり、 $AB=2$ 点 P から実軸に下ろした垂線の足を H とすると、 $\triangle PAB = \frac{1}{2}AB \cdot PH = PH = 3 + \sin\theta$ によって、 $\theta = \frac{\pi}{2}$, つまり、 $w = -1+4i$ のとき、面積最大。このとき、 $\angle PBA = \frac{\pi}{2}$ となり、 AP が外接円の直径となる。ゆえに、中心 $-2+2i$, 半径 $\sqrt{5}$

<2020年 東北大学 前期日程>

実数 t に対して複素数 $z = \frac{-1}{t+i}$ を考える。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) 絶対値 $|z - \frac{i}{2}|$ を求めよ。
- (3) 実数 t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、点 z はどのような図形を動くか、複素数平面上に図示せよ。

(略解)

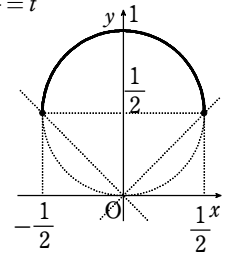
- (1) 分母の実数化をすると $z = \frac{-t+i}{t^2+1}$ より、

実部は $\frac{-t}{t^2+1}$, 虚部は $\frac{1}{t^2+1}$

- (2) $|z - \frac{i}{2}|^2 = \frac{1}{4}$ より、 $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$... ①

- (3) $z = x + yi$ とおくと、(1)より、 $-\frac{x}{y} = t$
 $-1 \leq t \leq 1$ より、 $-y \leq x \leq y$... ②

①②より、点 z が描く図形は
 中心 $(0, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円のうち
 不等式 $-y \leq x \leq y$ が表す領域にある部分である。



<2020年 東北大学 後期日程>

複素数平面上の原点を通らない異なる2直線 l , m に関して、原点と対称な点をそれぞれ α , β とする。

- (1) 直線 l 上の点 z は常に、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |\alpha|^2$ を満たすことを示せ。
- (2) $\bar{\alpha}\beta$ が実数でないことが、 l と m が交点をもつための必要十分条件であることを示せ。また、 l と m が交点をもつとき、交点を α , β を用いて表せ。

(略解)

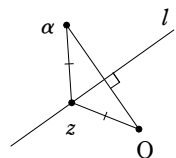
- (1) $|z-\alpha|^2 = |z-0|^2$ から $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |\alpha|^2$... ① が得られる。

- (2) l と m が交点をもつ $\Leftrightarrow l \not\parallel m$
 $\Leftrightarrow \vec{O\alpha} \not\parallel \vec{O\beta}$
 $\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{|\alpha|^2}$ が実数でない
 $\Leftrightarrow \bar{\alpha}\beta$ が実数でない

(1)と同様にして、 $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = |\beta|^2$... ②

①②から \bar{z} を消去すれば、交点 $z = \frac{|\alpha|^2\beta - |\beta|^2\alpha}{\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta}}$ を得る。

※ $\bar{\alpha}\beta$ が実数でない場合を考えているため、 $\bar{\alpha}\beta \neq (\bar{\alpha}\beta) = \alpha\bar{\beta}$ より、 $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} \neq 0$ であることを用いている。



<2020年 金沢大学 前期日程>

実数 k と複素数 z (ただし, $z \neq -1$) に対して, $w = \frac{z+k}{z+1}$ とする. また, i を虚数単位とする. 次の問いに答えよ.

(1) $k=0$ とする. $z=0$ に対する w の値を α , $z=1$ に対する w の値を β , $z=\sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする. 複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, $\angle BAC$ の大きさを求めよ.

(2) $k=-1$ とする. 点 z が複素数平面上の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき, 点 w の描く図形を求めよ.

(3) $k \neq 1$ とする. 複素数平面において, 点 z が虚軸上を動くとき, 点 w の描く図形を F とする. F が半径 $\frac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ.

(略解)

- (1) $k=0$ のとき, $w = \frac{z}{z+1}$, $\alpha=0$, $\beta = \frac{1}{2}$,
 $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ より, $\angle BAC = \arg \gamma = \frac{\pi}{6}$
- (2) $w = \frac{z-1}{z+1}$ を z について解いて, $|z|^2=2$ を変形すると,
 $|w-3|^2=8$ が得られるので, 点 w の描く図形は,
 点 3 を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円である.
- (3) $z = \frac{w-k}{1-w}$ であり, 点 z が虚軸上を動くので, $z + \bar{z} = 0$
 これを変形すると, $\left| w - \frac{1}{2}(k+1) \right|^2 = \frac{1}{4}(k+1)^2 - k$ を得る.
 点 w が半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることから, $k=0, 2$

<2020年 大阪府立大学 中期日程>

複素数平面上に三角形 ABC があり, 3点 $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ が $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sqrt{3}+i)$ をみたすとする. ただし, i は虚数単位とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\angle A$ の大きさを求めよ.

(2) $\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \right)^6$ を求めよ.

(3) $\angle C$ の大きさを求めよ.
 (この問題の計算の過程は記入しなくてよい.)

(略解)

- (1) $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = (\sqrt{3}+1) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ より, $\angle A = \frac{\pi}{6}$
- (2) $\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \right)^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1} \right)^6 \{ \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) \}$
 $= \frac{15\sqrt{3}-26}{8}$
- (3) 余弦定理を2回使うと, $BC^2 = (2+\sqrt{3})b^2$
 $\cos \angle C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ が得られるので, $\angle C = \frac{3}{4}\pi$

(II) 原点を中心とする回転と拡大・縮小を含んだ問題

<2020年 熊本大学 前期日程>

α, β を複素数とし, 複素数平面上の点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(|\alpha|^2)$, $D(\overline{\alpha\beta})$ を考える. 3点 O, A, B は三角形をなすとする. また, 複素数 z に対し, $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする. 以下の問いに答えよ.

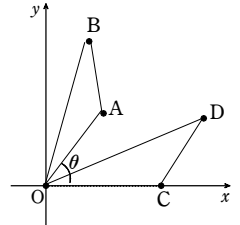
(1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき,
 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ.

(2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\overline{\alpha\beta})|$ で与えられることを示せ.

(3) 実数 a, b に対し, 複素数 z を $z = a + bi$ で定める.
 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき, 3点 $O(0)$, $P(z)$, $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ.

(略解)

- (1) $\arg \alpha = \theta$ とすると,
 $\arg(\overline{\alpha}) = -\theta$, $|\alpha|^2 = \alpha \overline{\alpha}$ より,
 辺 OC, OD は, それぞれ辺 OA, OB を原点を中心に $(-\theta)$ 回転させて,
 $|\alpha|$ 倍したものである.
 よって, $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ であり,
 相似比は, $1:|\alpha|$ であるから, $\frac{S_2}{S_1} = |\alpha|^2$
- (2) $S_2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2|\text{Im}(\overline{\alpha\beta})|$ であるから, (1) より, $S_1 = \frac{1}{2}|\text{Im}(\overline{\alpha\beta})|$
- (3) $\alpha = z, \beta = \frac{1}{z}$ とおくと, $C(z\overline{z}), D\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)$
 (2) より, $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left(\frac{\overline{z}}{z} \right) \right| = \dots = \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$



$x = \frac{a}{b}$ とおくと, $\triangle OPQ = \frac{x}{x^2+1} \left(\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \right)$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ とおき, 増減表を書くと,

x	$\frac{1}{3}$...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{3}{10}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{2}{5}$

よって, 最大値 $\frac{1}{2}$ ($a=b$ のとき),

最小値 $\frac{3}{10}$ ($a=1, b=3$ のとき)

<2020年 千葉大学 前期日程>

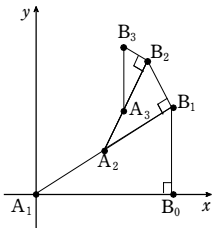
複素数平面上で複素数 $0, \sqrt{3}, \sqrt{3} + i$ を表す点をそれぞれ A_1, B_0, B_1 とする。正の整数 n に対して、点 A_{n+1} は線分 $A_n B_n$ の中点とし、点 B_{n+1} は直線 $A_n B_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり、三角形 $A_{n+1} B_n B_{n+1}$ が三角形 $A_1 B_0 B_1$ と相似になるものとする。点 $A_n (n=1, 2, 3, \dots)$ が表す複素数を z_n とする。

- (1) 複素数 z_3 を求めよ。
 (2) 複素数 z_6 を求めよ。
 (3) 正の整数 m に対して、複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

(解答)

(1) $\angle B_0 A_1 B_1 = \frac{\pi}{6}$ より、

$\triangle A_{n+1} B_n B_{n+1}$ と $\triangle A_{n+2} B_{n+1} B_{n+2}$ の相似比は、 $\sqrt{3}:1$ であるから、
 $A_n A_{n+1} : A_{n+1} A_{n+2} = \sqrt{3}:1$ である。



$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i$$

$$z_3 = z_2 + \alpha z_2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + i \end{aligned}$$

(2) $z_6 = z_2 + \alpha z_2 + \alpha z_3 + \alpha z_4 + \alpha z_5$
 $= z_2 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_2 + \alpha^3 z_2 + \alpha^4 z_2$
 $= (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4) z_2$
 $= \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} z_2$

ここで、 $1 - \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i = \frac{1}{3\alpha}$ より、

$$\begin{aligned} z^6 &= 3(\alpha - \alpha^6) z_2 = 3 \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \right) - \frac{1}{27} (\cos \pi + i \sin \pi) \right\} z_2 \\ &= 3 \left(\frac{29}{54} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i \end{aligned}$$

(3) $z_{6m} = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{6m-2}) z_2$
 $= \frac{1 - \alpha^{6m-1}}{1 - \alpha} z_2$
 $= 3(\alpha - \alpha^{6m}) z_2$

ここで、 $\alpha^{6m} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{6m} (\cos m\pi + i \sin m\pi) = \left(-\frac{1}{27} \right)^m$ より、

$$z_{6m} = 3 \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{27} \right)^m + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \right\} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

ゆえに、実部は $\frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ 1 - 3 \left(-\frac{1}{27} \right)^m \right\}$

虚部は $\frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{27} \right)^m \right\}$

(III) 数列を中心的に扱う問題

<2020年 愛媛大学 前期日程>

以下の問いに答えよ。ただし、 0 でない複素数 z に対して、 $z^0 = 1$ と定める。

- (1) α を $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha \neq 1$ を満たす複素数とする。このとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 2つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が $x_1 = 1, y_1 = 0$ および

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{によって定め}$$

られている。また、 i を虚数単位とし、 $z_n = x_n + iy_n$ とおく。

- (i) $z_{n+1} = \beta z_n (n=1, 2, 3, \dots)$ を満たす複素数 β を求めよ。
 (ii) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の一般項を求めよ。

- (iii) $\sum_{k=1}^n z_k$ の実部を求めよ。

- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ を求めよ。

(略解)

- (1) 等比数列の和の公式の証明であるため省略

- (2) (i) $z_{n+1} = \left(\frac{1}{4}x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}y_n \right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right)$

$$= \dots = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n$$

よって、 $\beta = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

- (ii) $z_1 = 1$ と (i) から、 $z_n = \beta^{n-1}$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ より、}$$

$$z_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left\{ \cos \frac{(n-1)\pi}{3} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{3} \right\}$$

よって、 $x_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{3}$

$$y_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi}{3}$$

- (iii) $\sum_{k=1}^n z_k = \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}$ より、この実部は、

$$1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cos \frac{2n+1}{6} \pi$$

- (iv) $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ とおくと、

$$S_N = \sum_{n=1}^N x_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \right)^N \cos \frac{2N+3}{6} \pi \text{ より、}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n} = 0$$

<2020年 名古屋工業大学 後期日程>

0以上の整数 n に対して複素数 z_n, S_n を次で定める。

$$z_n = \cos \frac{\pi}{2^n} + i \sin \frac{\pi}{2^n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} z_n^k$$

ただし、 $z_n^0 = 1$ とする。また、複素数 w_n を

$$w_0 = 1, \quad w_n = \frac{1+z_n}{2} w_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{ により定める。}$$

- (1) w_2 を計算せよ。
- (2) $n \geq 1$ のとき、 z_{n-1} を z_n で表せ。
- (3) $n \geq 1$ のとき、 $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ を z_n で表せ。
- (4) w_n の実部 a_n を求めよ。
- (5) w_n の虚部を b_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

(解答)

$$(1) \quad z_1 = i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad w_1 = \frac{1+z_1}{2} w_0 = \frac{1+i}{2} \text{ より,}$$

$$w_2 = \frac{1+z_2}{2} w_1 = \frac{2+\sqrt{2}(1+i)}{4} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1+\sqrt{2}}{4}i$$

$$(2) \quad z_n^2 = \cos \frac{\pi}{2^{n-1}} + i \sin \frac{\pi}{2^{n-1}} = z_{n-1} \text{ より, } z_{n-1} = z_n^2$$

$$(3) \quad z_n \neq 1 \text{ より, } S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} z_n^k = \frac{z_n^0(z_n^{2^n}-1)}{z_n-1} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{S_{n-1}} &= \frac{z_n^0(z_n^{2^n}-1)}{z_n-1} \cdot \frac{z_{n-1}-1}{z_{n-1}^0(z_{n-1}^{2^{n-1}}-1)} \\ &= \frac{z_n^{2^n}-1}{z_n-1} \cdot \frac{z_{n-1}-1}{z_{n-1}^{2^{n-1}}-1} = \frac{z_n^{2^n}-1}{z_n-1} = z_n+1 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$(4) \quad w_n = \frac{1+z_n}{2} w_{n-1} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{2^n} + i \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2} w_{n-1}$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} + i \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) w_{n-1}$$

$$= \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} + i \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) w_{n-1} \text{ より,}$$

$$|w_n| = 1 \times \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\arg w_n = 0 + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \dots + \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

よって、 $a_n = |w_n| \cos(\arg w_n)$

$$= 1 \times \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \times \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$$

$$= 1 \times \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \times \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= 1 \times \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^n} \times \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$= 1 \times \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^{n-1}} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$$

$$= \dots = \left(\frac{1}{2} \right)^n \sin \frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

(5) $n \geq 0$ のとき、

$$\cos \frac{\pi}{2^n} < \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ より, } 0 \leq |w_n| \leq \cos^n \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\text{また, } 0 < \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} < 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$$

$$\text{はさみうちの原理より, } \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 0 \text{ であるから, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

(IV) 確率と数列との融合問題

<2020年 大阪大学 前期日程>

1個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目が1の場合は $X_k = 1$ 、出た目が2である場合は $X_k = -1$ 、その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする。 $Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} X_k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} X_k\right)$ とおき、 Y_1 から Y_n までの積 $Y_1 Y_2 Y_3 \dots Y_n$ を Z_n で表す。ただし、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) Z_2 が実数でない確率を求めよ。
- (2) $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ がいずれも実数でない確率を求めよ。
- (3) Z_n が実数となる確率を p_n とする。 p_n を n を用いて表し、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

(解答)

$$X_k = 1, -1, 0 \text{ となる確率はそれぞれ } \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \text{ である。}$$

$$X_k = 1 \text{ のときの } Y_k \text{ を } \alpha \text{ とおくと, } \alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$X_k = -1 \text{ のとき, } Y_k = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \bar{\alpha}$$

$$X_k = 0 \text{ のとき, } Y_k = 1$$

$A(1), B(\alpha), C(\alpha^2), D(-1), E(\bar{\alpha}^2), F(\bar{\alpha})$ とおくと、 Z_n はこの6点のいずれかを表す複素数となる。

- (1) Z_2 が実数でないとき、 Z_1, Z_2 が表す点の組は、 $(A, B), (A, F), (B, B), (B, C), (F, F), (F, E)$ の6通りであるから、求める確率は、

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \right) \times 2 + \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \right) \times 2 + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 2 = \frac{1}{2}$$

- (2) 条件を満たすのは、 Z_1 が点Bを表し、 Z_2, Z_3, \dots, Z_n が点Bか点Cを表す場合と、 Z_1 が点Fを表し、 Z_2, Z_3, \dots, Z_n が点Eか点Fを表す場合である。

$$\text{よって、求める確率は、} \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right)^{n-1} \times 2 = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

$$(3) \quad p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6} (1 - p_n) = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{6}$$

$$\text{これを变形して, } p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{3} \right)$$

$p_1 = \frac{2}{3}$ より、数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{3} \right\}$ は、初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$$\text{よって, } p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ より, } p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$\text{また, } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{3}$$

(V) 代数方程式の解を扱う問題

<2020年 三重大学 前期日程>

α を複素数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) z が $z^4 + \alpha z^3 + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z + \alpha^4 = 0$ を満たすとき、 $z^5 = \alpha^5$ を示せ。
- (2) $\alpha \neq 0$ とし、 $z^5 = \alpha^5$ を満たす z で、 α でないものを z_1, z_2, z_3, z_4 とおく。
このとき $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ と $z_1 z_2 z_3 z_4$ を α を用いて表せ。
- (3) z_1, z_2, z_3, z_4 は (2) で与えられたものとする。
 $\alpha = 1 + 2i$ のとき、 $|\alpha - z_1| |\alpha - z_2| |\alpha - z_3| |\alpha - z_4|$ と $|\alpha + z_1| |\alpha + z_2| |\alpha + z_3| |\alpha + z_4|$ を求めよ。

(略解)

- (1) $z^5 - \alpha^5 = (z - \alpha)(z^4 + \alpha z^3 + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z + \alpha^4) = 0$
よって、 $z^5 = \alpha^5$
- (2) $f(z) = z^4 + \alpha z^3 + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z + \alpha^4$ とおくとき、
 z_1, z_2, z_3, z_4 は方程式 $f(z) = 0$ の解である。
よって、 $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$
 z^3 の係数から、 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\alpha$
定数項から、 $z_1 z_2 z_3 z_4 = \alpha^4$ が得られる。
- (3) $|\alpha - z_1| |\alpha - z_2| |\alpha - z_3| |\alpha - z_4| = |f(\alpha)| = |5\alpha^4| = 5|\alpha|^4 = 125$
 $|\alpha + z_1| |\alpha + z_2| |\alpha + z_3| |\alpha + z_4|$
 $= |(-\alpha - z_1)(-\alpha - z_2)(-\alpha - z_3)(-\alpha - z_4)|$
 $= |f(-\alpha)| = |\alpha^4| = |\alpha|^4 = 25$

<2020年 名古屋市長立大学 中期日程>

m, n, p, q を実数とする。 x の2次方程式 $x^2 + 2mx + n = 0$ と $x^2 + 2px + q = 0$ が、ともに実数解をもたないとき、それぞれの解を α, β と γ, δ とする。ただし、 α の虚部は正とする。複素数平面上で $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の表す点をそれぞれ A, B, C, D とするとき、次の問いに答えよ。ただし、O は複素数平面上的原点とする。

(1) 三角形 OAB が正三角形となるための条件を m, n で表せ。

(2) 三角形 OAC が正三角形となるときの、 p, q の値を m, n で表せ。

(解答)

- (1) 実数解をもたないので、 $m^2 - n < 0$... ①
 α の虚部が正より、 $\alpha = -m + \sqrt{n - m^2}i$
 $\beta = -m - \sqrt{n - m^2}i$
A(α), B(β) は実軸に関して対称であるから、
 $\triangle OAB$ が正三角形となるときの、 $\arg \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$
ゆえに、 $\tan(\arg \alpha) = \frac{\sqrt{n - m^2}}{-m} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $n - m^2 = \frac{1}{3}m^2$ から $n = \frac{4}{3}m^2$... ②
①②より、求める条件は、 $n = \frac{4}{3}m^2, m \neq 0$
- (2) 実数解をもたないので、 $p^2 - q < 0$... ③
 $w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とおくと、

$\triangle OAC$ が正三角形となるときの、 $\gamma = \alpha w$ または $\gamma = \alpha \bar{w}$

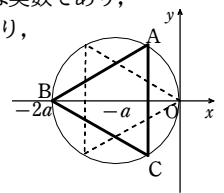
- (i) $\gamma = \alpha w$ のとき $\delta = \bar{\gamma} = \bar{\alpha} \bar{w} = \beta \bar{w}$
解と係数の関係より $-2p = \gamma + \delta = \alpha w + \bar{\alpha} \bar{w}$
 $q = \gamma \delta = \alpha \beta |w|^2 = \alpha \beta = n$
ここで、 $\alpha w = (-m + \sqrt{n - m^2}i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ の実部は、
 $-\frac{m + \sqrt{3(n - m^2)}}{2}$ より、
 $p = -\frac{\alpha w + \bar{\alpha} \bar{w}}{2} = \frac{m + \sqrt{3(n - m^2)}}{2}$
- (ii) $\gamma = \alpha \bar{w}$ のとき $\delta = \bar{\gamma} = \bar{\alpha} w = \beta w$
解と係数の関係より $-2p = \gamma + \delta = \alpha \bar{w} + \bar{\alpha} w$
 $q = \gamma \delta = \alpha \beta |w|^2 = \alpha \beta = n$
ここで、 $\alpha \bar{w} = (-m + \sqrt{n - m^2}i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ の実部は、
 $-\frac{m - \sqrt{3(n - m^2)}}{2}$ より、
 $p = -\frac{\alpha \bar{w} + \bar{\alpha} w}{2} = \frac{m - \sqrt{3(n - m^2)}}{2}$
- (i)(ii)より、 $p = \frac{m \pm \sqrt{3(n - m^2)}}{2}, q = n$

<2020年 京都大学 前期日程>

a, b は実数で、 $a > 0$ とする。 z に関する方程式 $z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0$... (*)
は3つの相異なる解を持ち、それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする。このとき、 a, b と (*) の3つの解を求めよ。

(解答)

- 条件より、(*) が実数解を1個、虚数解を2個もつので、それらを $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ とおく。ただし、 β は実数であり、 α の虚部は正とする。解と係数の関係より、
- $$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} + \beta = -3a & \dots ① \\ \alpha \bar{\alpha} + \bar{\alpha} \beta + \beta \alpha = b & \dots ② \\ \alpha \bar{\alpha} \beta = -1 & \dots ③ \end{cases}$$
- A(α), B(β), C($\bar{\alpha}$) とすると、
 $\triangle ABC$ の重心を表す複素数は、①より、 $\frac{\alpha + \beta + \bar{\alpha}}{3} = -a$
また、 $\triangle ABC$ の半径 R は、 $2R = \frac{\sqrt{3}a}{\sin 60^\circ}$ より、 $R = a$
正三角形の重心と外心は一致し、 $\beta \neq 0$ より、 $\beta = -2a$ である。
よって、 $\alpha = -a \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) a$
 $\bar{\alpha} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) a$
③より、 $-2a^3 = -1$
 a は実数であるから、 $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
②より、 $b = |\alpha|^2 + \beta(\bar{\alpha} + \alpha) = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
また、(*)の3つ解は、 $-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}i, -\sqrt[3]{4}$



(VI) 整数の性質との融合問題

<2020年 大阪市立大学 後期日程>

k を 2 以上の自然数とし、 $z = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$ とおく。

ただし、 i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

- (1) m, n を整数とする。 $m - n$ が k の倍数であることは、 $z^m = z^n$ となるための必要十分条件であることを示せ。
- (2) l を k と互いに素な自然数とする。このとき、複素数 $z^l, z^{2l}, z^{3l}, \dots, z^{kl}$ はすべて異なることを示せ。
- (3) l を自然数とする。複素数 $z^l, z^{2l}, z^{3l}, \dots, z^{kl}$ がすべて異なるとき、 k と l は互いに素であることを示せ。

(解答)

- (1) 「 $m - n$ が k の倍数 $\Leftrightarrow z^m = z^n$ 」を示す。
- (\Rightarrow) $m - n$ が k の倍数であるとき、
 $m - n = kN$ (N は整数) と表せるので、
 $m = n + kN$ より、
 $z^m = z^{n+kN} = z^n \cdot z^{kN} = z^n (\cos 2N\pi + i \sin 2N\pi) = z^n$
- (\Leftarrow) $z^m = z^n$ のとき、
 $\cos \frac{2m\pi}{k} + i \sin \frac{2m\pi}{k} = \cos \frac{2n\pi}{k} + i \sin \frac{2n\pi}{k}$ より、
- $$\begin{cases} \cos \frac{2m\pi}{k} = \cos \frac{2n\pi}{k} \\ \sin \frac{2m\pi}{k} = \sin \frac{2n\pi}{k} \end{cases}$$
- よって、 $\frac{2m\pi}{k} = \frac{2n\pi}{k} + 2N\pi$ (N は整数)
- ゆえに、 $m - n = kN$ より、 $m - n$ は k の倍数である。

- (2) 背理法を用いて証明する。
 l と k が互いに素な自然数であるとき、
 $z^{pl} = z^{ql}$ ($1 \leq q \leq p \leq k$) を満たす p, q が存在すると
仮定すると、(1) より、 $pl - ql = kN$ (N は自然数) と表せる。
 $(p - q)l = kN$

l と k は互いに素より、 $p - q$ は k の倍数である。
一方、 $0 < p - q \leq k - 1$ より、 $p - q$ が k の倍数となることはないので矛盾。

ゆえに、 l と k が互いに素な自然数であるとき、
複素数 $z^l, z^{2l}, z^{3l}, \dots, z^{kl}$ はすべて異なる。

- (3) 背理法を用いて証明する。
複素数 $z^l, z^{2l}, z^{3l}, \dots, z^{kl}$ がすべて異なるとき、
 k と l が互いに素でないを仮定すると、
2 以上の自然数 g を用いて、
 $k = gK, l = gL$ (K, L は自然数) と表せる。
 $2 \leq g$ より、 $1 \leq K \leq k - 1$ であるから、
 $a - b = K$ かつ $1 \leq b < a \leq k$ を満たす 2 つの自然数 a, b が
存在する。
このとき、 $al - bl = (a - b)l = Kl = KgL = kL$
ゆえに、 $al - bl$ が k の倍数になるので、(1) より、
 $z^{al} = z^{bl}$ が成り立つが、これは、複素数
 $z^l, z^{2l}, z^{3l}, \dots, z^{kl}$ がすべて異なることに矛盾する。
よって、複素数 $z^l, z^{2l}, z^{3l}, \dots, z^{kl}$ がすべて異なるとき、
 k と l は互いに素である。

3 まとめ

今回の研究を通して、複素数平面では、計算や図形に関する基本的な問題から、数列や確率などの分野との融合問題まで、幅広いレベルの問題が出題されていることが分かった。それほど複雑な計算はなかったが、ド・モアブルの定理を中心とした複素数の扱い方や、熊本大学や千葉大学などの入試問題に見られるように、原点を中心とする回転と拡大・縮小などの図形的な考察に慣れておく必要があると感じた。

また、数列をはじめ、他の分野との融合問題も多く見られたため、演習することで様々な分野の知識や理解を深めることもできると分かった。例えば、名古屋工業大学の問題では、三角関数の半角や2倍角の公式、数列の極限など、様々な基本的な知識が必要となる。また、名古屋市立大学や京都大学で出題された、正三角形であるための条件を求める問題でも、方程式の虚数解を扱い、解と係数の関係などを用いる必要がある。

さらに、大阪大学の問題では、複素数の性質をうまく利用して、問題を解く力が試されていると思われる。原点中心の半径1の円に内接する正六角形の各頂点で考えるという設定ができるかどうかで、簡潔な答案が作成できるか決まる。これらの問題に対応するためには、十分な演習量を確保し、複素数の扱いに慣れておく必要がある。逆に言えば、演習量を確保して対策することで、ライバルとの差を広げることのできる可能性があるということである。今回は、2020年度入試問題のみを研究したため、複素数平面の問題を例年出題する大学などの分析はできていない。今後も研究を続け、例年複素数平面が出題されている大学を受験する生徒に関しては、演習量の確保のため、個別での対応も考えていきたい。

4 参考文献

- 2021年受験用全国大学入試問題正解 [5] 数学 (国公立大編) (旺文社)
- 2021年受験用全国大学入試問題正解 [6] 数学 (追加掲載編) (旺文社)