国公立大学入試問題の研究

−数学的帰納法を用いた証明問題の研究−

愛媛県立松山東高等学校　　松　浦　　　正

1　はじめに

受験指導を行うときに感じることは，論証問題に対して苦手意識をもつ生徒が非常に多いということである。別解のある問題も多く，解答中で必ず押さえるべき条件の導き方や，その条件に気付くための思考力・発想力を身に付けることは容易なことではない。そのため，暗記中心の学習スタイルの生徒や思考力・発想力が不足している生徒にとってはとても苦労するのが証明問題である。

本研究では，数学的帰納法に焦点を当て，昨年の大学入試問題を中心に出題形式，出題頻度，解法について分析を行うことを通して，数学的帰納法の単元における体系的な学習指導に役立てていきたいと思い，この研究テーマを設定した。

２　大学入試問題の分析

①『 $n=k$ で成立と仮定 → $n=k+1$でも成立 』型

数列の単元において，教科書等で扱われる基本パターンであり，『Σ』記号を持ちいた等式の証明や不等式の証明で利用される。

＜２０２０　宮崎大学＞

数学的帰納法を用いて，自然数 n に対する次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

＜２０２０　東北大学＞

n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする。

(1)　$n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8<3^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $2^n+n^2+8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3)　等式 $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ を満たす a，b，n の組 $(a，b，n)$ をすべて求めよ。

＜発展問題１　２０２０　神戸大＞

p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は $x_1=\dfrac{1}{2^p+1}$，$x_{n+1}=|2x_n-1|$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ を満たすとする。

(1)　$p=3$ のとき，x_n を求めよ。

(2)　$x_{p+1}=x_1$ であることを示せ。

【解法の分析】

(1) で x_1，x_2，x_3，$\cdots$ を順に求めていけば周期性があることは容易に気付くので，(2) では，$2 \leqq n \leqq p+1$ に対して，数列 $\{x_n\}$ の一般項を $x_n=1-\dfrac{2^{n-1}}{2^p+1}$ と推測し，それを数学的帰納法で証明する。そして，最後に周期 3 となるための条件式 $x_{p+1}=x_1$ を導く。

【解答例】

(1)　$p=3$ のとき，数列 $\{x_n\}$ は周期が 3 の数列であるから，

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (n=3m-2)\\[2mm] \dfrac{7}{9} & (n=3m-1)\quad (m\text{ は自然数})\\[2mm] \dfrac{5}{9} & (n=3m)\end{cases}$$

(2)　条件により，$x_2=\left|2\cdot\dfrac{1}{2^p+1}-1\right|=1-\dfrac{2}{2^p+1}$

$$x_3=\left|2\left(1-\frac{2}{2^p+1}\right)-1\right|=1-\frac{2^2}{2^p+1}$$

……

よって，$2 \leqq n \leqq p+1$ に対して，$x_n=1-\dfrac{2^{n-1}}{2^p+1}$　…… ①

となることが推測される。

[1]　$n=2$ のとき，① の右辺は，$1-\dfrac{2^{2-1}}{2^p+1}=1-\dfrac{2}{2^p+1}$

よって，$n=2$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(2 \leqq k \leqq p)$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$x_k=1-\dfrac{2^{k-1}}{2^p+1}$ $(2 \leqq k \leqq p)$　…… ②　と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると，② から，

$$x_{k+1}=\left|2\left(1-\frac{2^{k-1}}{2^p+1}\right)-1\right|=\left|1-\frac{2^k}{2^p+1}\right|$$

ここで，$p \geqq k$ より，$\dfrac{2^k}{2^p+1}<1$

ゆえに，$x_{k+1}=1-\dfrac{2^k}{2^p+1}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$2 \leqq n \leqq p+1$ に対して ① は成り立つ。

したがって，$x_{p+1}=1-\dfrac{2^p}{2^p+1}=\dfrac{1}{2^p+1}=x_1$

＜類題　２０２０　琉球大＞

i を虚数単位とし，複素数 a_n を $a_1=-1$，

$a_{n+1}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n+\sqrt{3}i$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ によって定める。

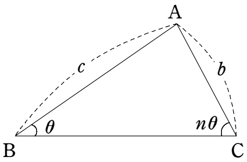
(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　すべての正の整数 n について $a_{n+3}=a_n$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

＜発展問題２　２０２０　大阪大学＞
n を２以上の自然数とする。三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。
$\angle ACB = n\angle ABC$ であるとき，$c < nb$ を示せ。

【解法の分析】
$\angle ABC = \theta$，$\angle ACB = n\theta$ と正弦定理から，証明すべき不等式を $n\sin\theta - \sin n\theta > 0$ と同値変形できるかがポイントである。この不等式の証明は，$f(\theta) = n\sin\theta - \sin n\theta$ とおいて，$f(\theta)$ の増減を調べて示すこともできる。

【解答例】
$\angle ABC = \theta$ とおく。



$\pi = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$
$\quad = \angle BAC + \theta + n\theta$
$\quad = \angle BAC + (n+1)\theta > (n+1)\theta$

ゆえに，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}\left(\leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

三角形 ABC において，正弦定理より，$\dfrac{b}{\sin\theta} = \dfrac{c}{\sin n\theta}$

すなわち，$c = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} b$

したがって，証明すべき不等式は，$n\sin\theta - \sin n\theta > 0$

すなわち，$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} < n$ ……① と同値であるから，２以上のすべての自然数 n で ① が成り立つことを数学的帰納法で示す。

（ｉ）$n=2$ のとき，

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta < 2$$

よって，$n=2$ のとき ① は成り立つ。

（ii）$n=k$（k は２以上の自然数）のとき ① が成り立つと仮定すると，$\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta} < k$

ここで，
$$\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\cos\theta + \cos k\theta < k\cdot 1 + 1 = k+1$$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

（ｉ），(ii) より，２以上のすべての自然数 n で ① が成り立ち，$c < nb$ も成り立つ。

②『 $n=k$，$k+1$ で成立と仮定 → $n=k+2$でも成立 』型
$n=k$ で成り立つと仮定して，$n=k+1$ でも成立することを示そうとしても上手くいかないときがある。隣接３項間の漸化式が関係している問題が多い。

＜２０２０　長崎大学＞
$\alpha = 1+\sqrt{2}$，$\beta = 1-\sqrt{2}$ に対して，$P_n = \alpha^n + \beta^n$ とする。このとき，P_1 および P_2 の値を求めよ。また，すべての自然数 n に対して，P_n は４の倍数ではない偶数であることを証明せよ。

【解答例】
$P_1 = \alpha + \beta = 2$，$\alpha\beta = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$

よって，$P_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2\cdot(-1) = 6$

「P_n は４の倍数ではない偶数である」… ① として，数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき，$P_1 = 2$　　$n=2$ のとき，$P_2 = 6$
よって，$n=1$，２のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき，① が成り立つと仮定する。
$n=k+2$ のときを考えると

$$\begin{aligned}
P_{k+2} &= \alpha^{k+2} + \beta^{k+2}\\
&= (\alpha+\beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - (\alpha^{k+1}\beta + \alpha\beta^{k+1})\\
&= (\alpha+\beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k)\\
&= 2(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) + (\alpha^k + \beta^k) = 2P_{k+1} + P_k
\end{aligned}$$

仮定より，P_{k+1} は偶数であるから，$2P_{k+1}$ は４の倍数である。また，P_k は４の倍数でない偶数である。
ゆえに，$2P_{k+1} + P_k$ は４の倍数でない偶数であるから，$n=k+2$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して，① は成り立つ

＜類題　２０２０　京都大学＞
p を正の整数とする。α，β は x に関する２次方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の２つの解で，$|\alpha| > 1$ であるとする。

(1)　すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n + \beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ。

【解答例】(2) は省略。
x に関する２次方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の２つ解を α，β とするから，$\alpha^2 = 2p\alpha + 1$，$\beta^2 = 2p\beta + 1$

また，解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 2p$，$\alpha\beta = -1$

(1)　$a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。

$$\begin{aligned}
\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} &= \alpha^n\cdot\alpha^2 + \beta^n\cdot\beta^2\\
&= \alpha^n(2p\alpha + 1) + \beta^n(2p\beta + 1)\\
&= 2p(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + (\alpha^n + \beta^n)
\end{aligned}$$

よって，$a_{n+2} = 2pa_{n+1} + a_n$ ……①

ここで，すべての正の整数 n に対し，
『 a_n が整数であり，さらに偶数である 』……Ⓐ ことを数学的帰納法で証明する。

（ｉ）$a_1 = \alpha + \beta = 2p$

$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2=2(2p^2+1)$

よって，$n=1$，2 のとき Ⓐ は成り立つ。

(ii) $n=k$，$k+1$ (k は正の整数) のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると，a_k，a_{k+1} はともに整数であり，さらに偶数である

このとき，① から，$a_{k+2}=2pa_{k+1}+a_k$

$2pa_{k+1}$，a_k はともに偶数であるから，a_{k+2} も整数であり，さらに偶数である。すなわち，$n=k+2$ のときも Ⓐ は成り立つ。

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対し Ⓐ は成り立つ。

＜応用類題　２０２０　兵庫県立大学＞

3 次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの複素数解（重解の場合も含む）を α，β，γ とする。ただし，b，c，d は実数である。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ が実数であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n に対して，$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ が実数であることを示せ。

【解法の分析】

仮定を 3 段設定する問題であるが，出題頻度は多くない。

【解答例】

(1) 3 次方程式について，解と係数の関係により

$\alpha+\beta+\gamma=-b$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c$，$\alpha\beta\gamma=-d$

$-b$ は実数であるから，$\alpha+\beta+\gamma$ は実数である。

また，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-b)^2-2c=b^2-2c$

b^2-2c は実数であるから，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ は実数である。

さらに，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=-b\{(b^2-2c)-c\}-3d=-b^3+3bc-3d$

$-b^3+3bc-3d$ は実数だから，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ は実数である。

(2) $x^3=bx^2-cx-d$ の両辺に x^n を掛けて，

$x^{n+3}=bx^{n+2}-cx^{n+1}-dx^n$

ゆえに，$\alpha^{n+3}=-b\alpha^{n+2}-c\alpha^{n+1}-d\alpha^n$

$\beta^{n+3}=-b\beta^{n+2}-c\beta^{n+1}-d\beta^n$

$\gamma^{n+3}=-b\gamma^{n+2}-c\gamma^{n+1}-d\gamma^n$

よって，$I_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とおくと，

$I_{n+3}=-bI_{n+2}-cI_{n+1}-dI_n$　……①

このとき，

「任意の自然数 n に対して，I_n が実数である」…… ② を示す。

[1] $n=1$，2，3 のとき，(1) より，② が成り立つ。

[2] $n=k$，$k+1$，$k+2$ のとき，② が成り立つと仮定すると，b，c，d，I_k，I_{k+1}，I_{k+2} は実数であるから，

$-bI_{k+2}-cI_{k+1}-dI_k$ も実数であり，① より，I_{k+3} は実数である。

よって，$n=k+3$ のときにも ② は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ② は成り立つ。

すなわち，任意の自然数 n に対して，$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ は実数である。

③『 $n\leqq k$ で成立と仮定 → $n=k+1$でも成立 』型

＜２０１０　京都大学＞

数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して，

$0\leqq 3a_n\leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ を満たしているとする。このとき，すべての n に対して $a_n=0$ であることを示せ。

【解法の分析】

これまでに紹介してきた手法では上手く議論が展開できないこともある。そのような場合には，次のような特殊な数学的帰納法が活用できる。

すべての自然数 n である命題 P_n が成り立つことを示す

〔i〕 P_1 が成り立つことを示す。

〔ii〕 P_1，P_2，…，P_k が成り立つことを仮定して，P_{k+1} も成り立つことを示す。

【解答例】

すべての n に対して、$a_n=0$ が成り立つ ……① ことを，数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき，$0\leqq 3a_1\leqq a_1$

この連立不等式を解くと，$0\leqq a_1\leqq 0$　$\therefore a_1=0$

よって，$n=1$ のとき成り立つ。

(ii) $n\leqq k$ ($k=1$，2，3，……) を満たすすべての n で ① が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，条件式より，

$0\leqq 3a_{k+1}\leqq a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1}$

$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_k=0$ より，$0\leqq 3a_{k+1}\leqq a_{k+1}$ となり，上と同様に，$a_{k+1}=0$ である。ゆえに，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

以上より，すべての n に対して、$a_n=0$ が成り立つ。

＜類題　秋田大学＞

n を自然数とする。すべての正の数 a_1，a_2，…，a_n に対して，不等式

$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)^2\leqq n({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots\cdots+{a_n}^2)$

が成立することを，数学的帰納法により証明せよ。

また，等号が成立するのはどのようなときか。

［参考］

秋田大学の問題に出てくる不等式は，コーシー・シュワルツの不等式

$$({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

において，$b_1=b_2=\cdots=b_n=1$ としたときの不等式である。

したがって，等号成立は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときである。

＜類題　１９９３　東京工業大学＞

n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする。
$P(0)$，$P(1)$，……，$P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

④『無限降下法を活用した問題』

＜２０１４　九州大学＞

以下の問いに答えよ。。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a，b，c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しないことを証明せよ。

【解法の分析】

無限降下法は，自然数という集合の最小性を利用した証明方法であり，背理法の 1 種である。自然数に関する命題の証明に効果的であり，不定方程式に自然数解が存在しないことを示す際によく用いられる手法である。

【解答例】(1)，(2) は省略。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ ……① を満たす自然数が存在すると仮定する。(2) より，a，b，c はすべて 3 の倍数であるから，
$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$（a_1，b_1，c_1 は自然数）とおけて，① より，${a_1}^2+{b_1}^2=3{c_1}^2$
よって，a_1，b_1，c_1 はすべて 3 の倍数であるから，
$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$（a_2，b_2，c_2 は自然数）とおけて，① より，${a_2}^2+{b_2}^2=3{c_2}^2$ となる。
これを繰り返すことにより，自然数 a，b，c が 3 で無限回割り切れることになる。しかし，a は有限であるため，n を大きくすると $\dfrac{a}{3^n}$ はいつか 1 よりも小さくなる。すなわち，何度でも 3 で割り切れることは a が有限であることに矛盾する。
したがって，① を満たす自然数 a，b，c は存在しない。

＜類題　２０１７　お茶の水女子大学＞

次の問いに答えよ。

(1)　a，b を整数の範囲で動かして考えるとき，整数 a^2+3b^2 を 6 で割ったときの余りとして実際に得られるものを 0 から 5 の中からすべてあげよ。

(2)　$a^2+3b^2=2c^2$ を満たす整数 a，b，c は，$a=b=c=0$ に限ることを示せ。

(3)　実数 x，y が $x^2+3y^2=2$ を満たすとき，x と y との少なくとも一方が無理数であることを示せ。

＜類題　２０１６　名古屋大学＞

次の問いに答えよ。ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数えることとする。

(1)　次の条件 (*) を満たす整数 a，b，c，d，e，f の組をすべて求めよ。

(*)
$$\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である} \end{cases}$$

(2)　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件 (**) を満たすとする。

(**) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が，a_{n+1}，b_{n+1} である。

このとき，

(ⅰ)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ⅱ)　条件 (**) を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ。

【解答例】

(1)，(2) の (ⅱ) は省略。

(2)　(ⅰ)　解と係数の関係より，
$a_{n+1}+b_{n+1}=-a_n$ …… ①　　$a_{n+1}b_{n+1}=b_n$ …… ②

(ア)　すべての正の整数 n について，$a_{n+1}\fallingdotseq 0$ のとき，
② および a_{n+1} が整数であることより，
$|a_{n+1}||b_{n+1}|=|b_n|$，$|a_{n+1}|\geqq 1$
よって，$|b_{n+1}|=\dfrac{|b_n|}{|a_{n+1}|}\leqq |b_n|$
ゆえに，数列 $\{|b_n|\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は，単調減少，かつ，正の整数 の数列であるから，$|b_1|\geqq|b_2|\geqq|b_3|\geqq\cdots\cdots>0$
よって，正の整数 m で $|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots\cdots$ となるものが存在する。

(イ)　ある正の整数 n について，$a_{n+1}=0$ のとき
①，② より，
$a_{n+2}+b_{n+2}=-a_{n+1}=0$ ……③
$a_{n+2}b_{n+2}=b_{n+1}$ ……④
$a_{n+3}+b_{n+3}=-a_{n+2}$ ……⑤
$a_{n+3}b_{n+3}=b_{n+2}$ ……⑥
③，⑤，⑥ より a_{n+2} を消去すると，
$-(a_{n+3}+b_{n+3})+a_{n+3}b_{n+3}=0$
$(a_{n+3}-1)(b_{n+3}-1)=1$
これを解くと，$(a_{n+3},\ b_{n+3})=(2,\ 2)$，$(0,\ 0)$
$(a_{n+3},\ b_{n+3})=(2,\ 2)$ のとき，$x^2+2x+2=0$ の 2 つの解 a_{n+4}，b_{n+4} が整数にならないので不適。
$(a_{n+3},\ b_{n+3})=(0,\ 0)$ のとき，④，⑤，⑥ より，
$(a_{n+2},\ b_{n+2})=(0,\ 0)$，$b_{n+1}=0$
さらに，①，② より，$(a_n,\ b_n)=(0,\ 0)$

以上から，$a_{n+1}=0$ のとき，$(a_{n+1},\ b_{n+1})=(0,\ 0)$
これから，$(a_{n+2},\ b_{n+2})=(0,\ 0)$，$(a_n,\ b_n)=(0,\ 0)$ も示せるので任意の自然数 n について，$a_n=0$，$b_n=0$
すなわち，$|b_1|=|b_2|=|b_3|=\cdots\cdots=0$
以上より，題意は示せた。

＜発展類題　２００６　東京大学＞
次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。
条件 (A)：$x,\ y,\ z$ は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$，および $x\leqq y\leqq z$ を満たす。以下の問いに答えよ。
(1)　条件 (A) を満たす $(x,\ y,\ z)$ で，$y\leqq3$ となるものをすべて求めよ。
(2)　組 $(a,\ b,\ c)$ が条件 (A) を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。
(3)　条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。

【解法の分析】
(3) で，無限降下法の発想に近い考え方を用いている。

【解答例】(1) は省略。
(2)　題意を満たすような z が存在する条件は，
$b^2+c^2+z^2=bcz$
$z^2-bcz+abc-a^2=0$　$(\because\ b^2+c^2=abc-a^2)$
$(z-a)(z-bc+a)=0$　$\therefore\ z=a,\ z=bc-a$
ここで，(1) から，$b\geqq3$，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ であるから，
$(bc-a)-c=c(b-1)-a\geqq2c-a=c+(c-a)>0$ ……①
よって，$z=bc-a$ ととると，
$b^2+c^2+z^2=bcz$　かつ　$b\leqq c\leqq z$ が成り立つ。
ゆえに，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件 (A) を満たすような z が存在する。
(3)　$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(3,\ 3,\ 6)$，
$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})=(y_n,\ z_n,\ y_nz_n-x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$
によって，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を定める。
(2) より，$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ は条件(A) を満たし，
① より，$z_1<z_2<\cdots<z_n<\cdots$ である。
よって，$(x_n,\ y_n,\ z_n)$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ はすべて異なる。
ゆえに，条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在する。

＜発展類題　２０１７　九州大学＞
次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。
$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$
(1)　2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+2}>2a_n$ が成り立つことを示せ。
(2)　2 以上の自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k\geqq2)$ の項の和で表されることを，数学的帰納法によって示せ。
(3)　(2) における項の個数 k は，$k<2\log_2 m+2$ を満たすことを示せ。

【解答例】
(1)，(3) は省略。
(2)　m に関する数学的帰納法で証明する。
[1]　$m=2$ のとき
$2=a_1+a_2$ であるから，$m=2$ は数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる 2 個の項の和で表される。
[2]　$m\geqq3$ とし，2 以上 m 未満のすべての自然数は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k\geqq2)$ の項の和で表されると仮定する。
(1) から，$2=a_3<a_4<\cdots\cdots<a_l<a_{l+1}<\cdots\cdots$
l を大きくしていくと a_l は限りなく大きくなるから，
$a_n\leqq m<a_{n+1}$ を満たす自然数 n $(n\geqq3)$ がただ 1 つ存在し，この n に対して，$0\leqq m-a_n<a_{n+1}-a_n$ が成り立つ。
$a_{n+1}-a_n=a_{n-1}$ であるから，$0\leqq m-a_n<a_{n-1}$
$m-a_n=0$ のとき，$m=a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ と表せる。
$m-a_n=1$ のとき，$m=1+a_n=a_1+a_n$ と表せる。
$m-a_n\geqq2$ のとき，仮定から，$m-a_n$ は，
$m-a_n=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots\cdots+a_{i_l}$
$(1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_l,\ l\geqq2)$　と表せる。
$m-a_n<a_{n-1}$ であるから，$i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_l$ の中に n は存在しない。
よって，$m=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots\cdots+a_{i_l}+a_n$ と表せる。
自然数 m についても，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる項の和で表される。
[1]，[2] から，数学的帰納法により，すべての自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k\geqq2)$ の項の和で表される。

＜ 発展例題 ＞
数列 $\{a_n\}$ は，
$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
で定義されている。
任意の自然数 n に対して，a_n と a_{n+1} は互いに素であることを証明せよ。

【解法の分析】
フィボナッチ数列の隣接する 2 項が互いに素であることの証明である。1 以外に公約数をもたないことを証明するために，否定である「１以外に公約数をもつ」と仮定する背理法を用いる。その中で無限降下法の考え方を用いて a_1 と a_2 が 1 以外の公約数をもつという矛盾を導くことで証明できる。

⑤『双方向（正負）への帰納法』型

ある事柄について，指数関数的に大きくなるような n について成立することを数学的帰納法によって示してから，次に n が小さくなる方向に 1 つずつ再び数学的帰納法を構築させる手法である。大学入試問題ではほとんど見られないパターンなので，例題と解答例のみを紹介する。

＜例題＞　相加平均・相乗平均の大小関係の一般化
n を 2 以上の自然数とする。
n 個の 正の整数 a_1，a_2，…，a_n に対して，
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \quad \cdots\cdots ①$$
が常に成立することを示せ。

【解答例】

（ｉ） $n=1$ のとき，
$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2} \geqq 0$$
よって，① は成り立つ。

（ii） $n=2^m$（m は自然数）で ① が成り立つと仮定する。

このとき，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}$
$$\geqq \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^m]{a_1a_2\cdots a_{2^m}}+\sqrt[2^m]{a_{2^m+1}a_{2^m+2}\cdots a_{2^{m+1}}}\right)$$
$$\geqq \sqrt[2^{m+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^{m+1}}}$$
となるので，$n=2^{m+1}$ のときも ① は成り立つ。

（iii） $n=k$（k は 3 以上の自然数）のときに ① が成り立つと仮定する。

すなわち，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geqq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$

が成り立つと仮定する。

このとき，$a_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$ を代入すると
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1} \geqq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1} \cdot \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \geqq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1} \geqq \sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}$$
よって，$n=k-1$ のときも成り立つ。

したがって，2 以上のすべての自然数において ① は成り立つ。

＜類題＞　相乗平均≧調和平均の不等式
n を 2 以上の自然数とする。
n 個の 正の整数 a_1，a_2，…，a_n に対して，
$$(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \geqq n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1}$$
が常に成立することを示せ。

4　おわりに

今回の研究を通して，大学入試問題では数学的帰納法を用いることが指示されていない場合が多いという特徴が見えてきた。受験生の柔軟な思考力・発想力・問題解決能力を見極めたいという大学側の思いが論証問題に込められているのだと考えられる。したがって，論証問題の解答では「数学的帰納法で示す」などの方針を提示し，根拠を論理的に記述するように指導していくことが大切である。特に，数学的帰納法は，

① $n=a$ のとき成立
② $n=k$ $(k \geqq a)$ のとき成立するならば，
$n=k+1$ のときも成立

という基本定型パターンをうまく活用すれば解答を作れるので，トレーニングをして定着させたい証明方法である。中には，成立仮定を 2 段階準備する必要があったり，特殊な論法が必要な難問もあるが，数列，漸化式，等式・不等式，自然数・整数というように扱われる内容は絞り込むことができる。思考力・表現力がより一層問われる「大学入学共通テスト」の導入も控えており，今後は与えられた課題にどう切り込んでいくか，そのアプローチの仕方を生徒たちに工夫させるような指導が重要になる。今後の入試全体の動向にも注意をしながら，それぞれの単元ごとの入試問題研究を続けていきたい。

【参考文献】

2021 年受験用　全国大学入試問題正解〔国公立大編〕（旺文社）
大学への数学スペシャル 東大・東工大（研文書院）
大学への数学　数学を決める論証力（東京出版）
モノグラフ数列（科学新興新社）