

令和2年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立西条高等学校 吉村 新平

1 はじめに

実際の令和2年度愛媛大学入試問題を利用して、本校生徒がどの問題でどのような間違いをするのか、誤答分析を中心に考察していきたい。

なお、今年は新型コロナウイルス感染拡大防止のため、例年5月に行われている愛媛大学の教授による入試問題の解説が行われなかった。そのため、教授コメントが掲載できないことについて、ご容赦願いたい。

2 出題の傾向

(1) 問題数および試験時間

今年度は教育学部、農学部、工学部工学科社会デザインコースにおいては記述4題を100分で、理学部、工学部（社会デザインコースを除く）、医学部医学科においては記述5題を120分で、後期は記述5題を120分で解答する形で、昨年と大きな変化はなかった。

ただし、教育学部前期日程において、初等教育コース小学校サブコースでも数学Ⅲを含む受験が選択可能となっている点は大きな変更点である。これは、中等教育コース数学教育専攻との併願が可能となったためである。

また、教育学部受験者用の数学Ⅲの問題（微分法・積分法）が理学部、工学部受験者用のものと統一されたため総問題数は8題（昨年度までは9題）に減少している。

(2) 出題内容

教育学部（「数Ⅰ、数Ⅱ、数A、数B」受験者）
農学部、工学部（社会デザインコース）

- ① 小問集合（数学A・Ⅱ）
- ② 微分法・積分法（数学Ⅱ）
- ③ 空間ベクトル
- ④ 数列

教育学部（「数Ⅰ、数Ⅱ、数Ⅲ、数A、数B」受験者）

- ① 小問集合（数学A・Ⅱ）
- ③ 空間ベクトル
- ④ 数列
- ⑥ 微分法・積分法（数学A・Ⅱ・Ⅲ）

理学部、工学部（社会デザインコースを除く）

- ③ 空間ベクトル
- ④ 数列
- ⑤ 小問集合（数学A・Ⅱ・Ⅲ）
- ⑥ 微分法・積分法（数学Ⅲ）
- ⑦ 複素数平面、無限級数

医学部医学科

- ③ 空間ベクトル
- ④ 数列

- ⑥ 微分法・積分法（数学Ⅲ）

- ⑦ 複素数平面、無限級数

- ⑧ 数列の極限

後期

- ① 小問集合（穴埋め）（数学Ⅱ・B・Ⅲ）

- ② 小問集合（数Ⅱ・Ⅲ）

- ③ 微分法（数学Ⅲ）、無限級数

- ④ 微分法・積分法（数学Ⅲ）

- ⑤ 複素数平面、確率漸化式

(3) 出題者の意図

令和2年度学生募集要項に記載されている個別学力検査の採点・評価基準によると、どの学科においても「数学の基礎をなす諸概念を的確に把握し、応用することができるか問うとともに、広く数学についての理解力、論理的思考力、計算力、記述力を総合的に評価する」とされている。昨年までと同様のポイントであると推測される。

3 問題分析

本校の3年生に入試問題を解いてもらった。

普通科理系の数学Ⅲ選択者の内、医療系学科や農学部志望者（10名）に前期①～④、上記以外の理系数学Ⅲ選択者と理数科の生徒（計56名）に前期③、⑤、⑥、⑦を解いてもらい、誤答例から分析を行った。

医学部医学科用の問題⑧と後期の問題は生徒に解いてもらっていないので、問題の紹介のみとする。

<前期>

- ① 小問集合（数学A・Ⅱ）

以下の問いに答えよ。

- (1) 3個のさいころを同時に投げるとき、少なくとも2個のさいころの目が一致する確率を求めよ。

- (2) 座標平面において、連立不等式

$$x + y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq y$$

の表す領域を図示せよ。

- (3) 不等式 $4^x + 2^{x+2} - 32 \leq 0$ を解け。

- (4) 実数 θ が $0 < \theta < 2\pi$, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ を満たすと

き、 $\sin \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

- (5) 最大公約数が24で、最小公倍数が432であるような2つの自然数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。ただし、 $a \leq b$ とする。

【誤答例】

- (1) ちょうど2個のさいころの目が同じ確率を $\frac{5}{6^2}$ とした。
 (2) $0 \leq x \leq y$ を, $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ として扱っている。
 (3) 与式を $2^{2x} + 2^{x+2} - 2^5 \leq 0$ とした後, 指数のみを取り出して $2x + x + 2 - 5 \leq 0$ としている。
 (4) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta$, $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$,
 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos 2\theta$ など。
 (5) 24, 432 をそれぞれ素因数分解したところで終わっている。

【考察】

どの問題も教科書の練習問題で扱われるような基本的な問題であり、確実に正解してほしいところである。

(1) は余事象を使うことに気付いて欲しい問題である。すべての目が異なる場合が順列で考えられることも覚えさせておきたい。

(2) では $A \leq B \leq C$ のタイプの不等式を連立不等式として正しく扱えていないという弱点が明確になった。

(3) の誤答例ような間違いは、対数方程式でもよく見られる。指数・対数において特に注意して指導したい内容である。

(4) で使われる半角の公式は、使う機会も少なく、特に定着度の低い公式である。

(5) では432の約数をすべて書き並べて求める組を探そうとする解答もあり、何とか答えにたどり着こうと努力する態度が見られた。無答で終わるよりは、具体的操作でも答えを模索するようにさせたい。

② 微分法・積分法(数Ⅱ)

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l とする。ただし、 a は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
 (2) 放物線 $y = x^2$, 接線 l , および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
 (3) 接線 l に垂直で、放物線 $y = x^2$ に接する直線を m とする。
 (i) 直線 m の方程式, および直線 m と放物線 $y = x^2$ の接点 P の座標を求めよ。
 (ii) 接線 l と直線 m の交点 Q の座標を求めよ。

【誤答例】

- (1) 接線 l の傾きを $2x$ としている。
 (2) $\int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx$ (x 軸の下側も含んでいる)
 (3)(i) 直線 m を, 点 P を通り直線 l に垂直な直線

としている。

(ii) (i) が正しく求められていないため、不正解。

【考察】

導関数と微分係数の区別がついていない生徒はこれまでも多くいた。導関数を求めた後、接点の座標を代入することで微分係数を求めなければならないことを繰り返し指導していく必要がある。

(2) はよくあるタイプの求積問題である。図を正しく書いているのだが、立式を正しくできていない。

③ 空間ベクトル

原点を O とする座標空間に2点 $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 2, 2)$ がある。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{a} , \vec{b} の大きさ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, および内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
 (2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。
 (3) 点 C は次の条件 (a), (b), (c) をすべて満たすとする。
 (a) 直線 OC は, 3点 O, A, B で定まる平面に垂直である。
 (b) 線分 OC の長さは $5\sqrt{2}$ である。
 (c) ベクトル \overrightarrow{OC} とベクトル $\vec{e} = (1, 0, 0)$ とのなす角は, 0 以上, $\frac{\pi}{2}$ 以下である。

また, $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して, 線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を D とする。

- (i) 点 C の座標を求めよ。
 (ii) 点 D の座標を t を用いて表せ。
 (iii) $\triangle OCD$ の面積を最小にする t の値を求めよ。

【誤答例】

- (1) ベクトル (x, y, z) の大きさを, $x + y + z$, xyz , $|x| + |y| + |z|$ などとしている。
 (2) 面積を $\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| (\vec{a} \cdot \vec{b})$ としている。
 (3)(i) 条件 (c) を使って, 点 C の x 座標が正であることを説明できていない。
 (ii) 内分点の座標の公式を正しく使えていない。
 (iii) $\triangle OCD$ の面積を t を用いて表そうとして, 途中で計算ミス。

【考察】

(1) の後半, 内積を求める問題で, わざわざ $|\overrightarrow{AB}|$ を求め, 余弦定理で $\cos \angle AOB$ を求める解答が多く見られた。成分と内積の関係が定着していない。

(2) でも, 面積の公式 $\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ を利用

している解答は正解者の $\frac{1}{3}$ で、残りは $\sin \angle AOB$ を求めていた。

(3)の条件(c)のようにして座標の符号を限定する出題の仕方は面白い。

4 数列

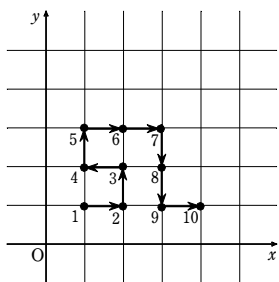
座標平面上で x 座標、 y 座標がともに整数である点 (x, y) のことを格子点という。以下において、格子点から格子点へと移動していく点 P を考える。

格子点 (x, y) にいる点 P は、1回の移動で、格子点 $(x+1, y)$ 、 $(x-1, y)$ 、 $(x, y+1)$ 、 $(x, y-1)$ のいずれかに移る。これらの移動をそれぞれ、右への移動、左への移動、上への移動、下への移動という。

P は、はじめ格子点 $(1, 1)$ にあり、次の規則(★)に従って別の格子点へ移動していく。

- (★) P は格子点 $(1, 1)$ から右へ1回、上へ1回、左へ1回、上へ1回、右へ2回、下へ2回、順に移動し、格子点 $(3, 1)$ にたどり着く。以降同様に、 $m=2, 3, 4, \dots$ に対して、 P は格子点 $(2m-1, 1)$ から右へ1回、上へ $(2m-1)$ 回、左へ $(2m-1)$ 回、上へ1回、右へ $2m$ 回、下へ $2m$ 回、順に移動し、格子点 $(2(m+1)-1, 1)$ にたどり着く。

次に、 x 座標、 y 座標がともに自然数である格子点に番号を付ける。まず、 P がはじめにいた格子点 $(1, 1)$ に番号1番を付ける。その後、 P が通った格子点に、順に番号2番、3番、4番、 \dots を付ける。次の図は、 P の格子点 $(1, 1)$ から格子点 $(4, 1)$ までの移動と、番号1番から10番までの番号付けを表したものである。



以下の問いに答えよ。

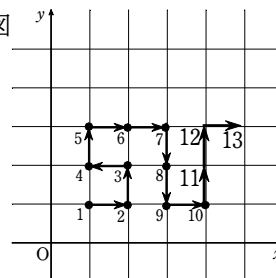
- (1) 次の に適する数または式を、解答欄に記入せよ。
- (i) 格子点 $(5, 3)$ に付けられた番号は 番である。
- (ii) n を自然数とする。格子点 $(2n, 1)$ に付けられた番号は 番であり、格子点 $(1, 2n+1)$ に付けられた番号は 番で

ある。

- (2) 自然数 n に対して、格子点 (n, n) に付けられた番号を a_n とする。
- (i) a_n を n を用いて表せ。
- (ii) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。
- (3) 番号2020番が付いた格子点の座標を求めよ。

【誤答例】

- (1) 番号の付け方を、右図のように間違えている。



- (2) 以降、誤答なし(正答か無答か)

【考察】

規則(★)が正確に読み取れていない解答が多い。共通テストでも読解力が求められる。数学の活動の中で読解力を鍛える必要性を強く感じた。

規則さえ読み取れていれば、具体的に番号を付けていくことで規則性を見つけられると思うが、無答が多かった。

5 小問集合(数A・II・III)

以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において、連立不等式 $x+y \leq 2, 0 \leq x \leq y$ の表す領域を図示せよ。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 3x})$ を求めよ。
- (3) 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ があり、 x 座標および y 座標が時刻 t の関数として $x = \sin 2t, y = \sin 3t$ で与えられているとする。時刻 $t = \frac{\pi}{12}$ における点 P の速度 \vec{v} および加速度 \vec{a} を求めよ。
- (4) 不定積分 $\int x \cos(x^2) dx$ を求めよ。
- (5) さいころを4回続けて投げる。出た目の和が7以上である確率を求めよ。

【誤答例】

- (1)
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{1}{x}} - 3} = \infty$

$$(3) \vec{v} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

- (4) 部分積分で計算しようとする、 $\cos(x^2)$ を $\cos^2 x$ と間違えるなど。
 (5) 和が6以下の場合を求める際の数え忘れ。

【考察】

(1) は [1](2) と共通の問題である。 $x+y \leq 2$ と $x \leq y$ を連立して、 $2x \leq 2$ とする間違いが複数見られた。方程式と不等式の扱いを混同している。

(2) の誤答はよくあるパターンである。

(3) は、入試問題では珍しい速度・加速度を求めさせる問題である。新学習指導要領に普通教科「理数」が新設され、数学の理科への活用が必要とされることを受けての出題だろうか。

(4) は、整式と三角関数の積の積分なので、部分積分したくなる気持ちはわかる。部分積分でチャレンジした後、別の解法に方針転換できないのは、演習不足であろう。

(5) はもれなく数え上げる練習をしておくことの必要性を感じる問題であった。

[6] 微分法・積分法 (数Ⅲ)

原点を O とする座標平面において、曲線 $y = x(\log x)^2$ ($x > 0$) を C とする。 C の変曲点を P とし、直線 OP と C との交点のうち、 P と異なる点を Q とする。また、 C 上の点 Q における接線を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = x(\log x)^2$ ($x > 0$) の導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ。
 (2) 点 P および点 Q の座標を求めよ。
 (3) 接線 l の方程式を求めよ。
 (4) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\int x \log x dx$

(ii) $\int x(\log x)^2 dx$

- (5) 曲線 $y = x(\log x)^2$ ($x \geq 1$)、接線 l 、および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

【誤答例】

- (1) $\cdot (\log x)^2 = 2 \log x$ として計算。
 $\cdot \{(\log x)^2\}' = \frac{1}{x^2}$
 (2) 変曲点を求める際に、 y'' の符号の変化に言及していない。
 (3) (1) で微分が正しくできていない。
 (2) で点 Q の座標を正しく求められていない。
 (4) $\int \log x dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$,
 $\int (\log x)^2 dx = \frac{1}{3}(\log x)^3 + C$

$$(5) \int_1^e \{x(\log x)^2 - (3x - 2e)\} dx$$

(x 軸の下も含んでいる)

$$\int_{\frac{2}{3}e}^e \{x(\log x)^2 - (3x - 2e)\} dx$$

($1 \leq x \leq \frac{2}{3}e$ の部分を含まない)

【考察】

(2) で変曲点の十分条件として前後で y'' の符号が変化していることを確認できていない解答が目立った。極値や変曲点を y' や y'' の符号の変化と関連させて考えるよう、日ごろから習慣付けておく必要がある。

(5) では、[2] の(2) と同じように、図を正しく書いているのに立式が正しくできていない生徒が複数いた。

[7] 複素数平面・無限級数

以下の問いに答えよ。ただし、0 でない複素数 z に対して、 $z^0 = 1$ と定める。

- (1) $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha \neq 1$ を満たす複素数とする。このとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

- (2) 2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ および

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められている。また、 i を虚数単位とし、 $z_n = x_n + iy_n$ とおく。

- (i) $z_{n+1} = \beta z_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす複素数 β を求めよ。

- (ii) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

- (iii) $\sum_{k=1}^n z_k$ の実部を求めよ。

- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ を求めよ。

【誤答例】

- (1) 「等比数列の和の公式から」としている。
 (2)(i) $\cdot \beta$ を実数として扱い、実部と虚部を比較。
 $\cdot \beta = \frac{z_2}{z_1}$ として、一般の自然数 n について言及していない。
 (ii) (i) の誘導に気付かず、連立漸化式を解こうとしている。
 (iii) (1) の誘導に気付かず、(ii) で求めた x_n の和を計算しようとしている。

(iv) (iii)で求めた $\sum_{k=1}^n z_k$ の実部の極限を求めており、 x_1 を除くのを忘れている。

【考察】

ド・モアブルの定理と無限級数を組み合わせた、とても面白い問題である。やや難易度は高いと感じたが、誘導に気付いて欲しいところである。

(1) は和の公式の証明を求められていると考えられるので、「等比数列の和の公式から」と答えてしまうのは、出題者の意図をとらえられていない。実際に等比数列の公式を用いた場合にどう採点されるのかは気になるところである。

⑧ 数列の極限 (医学部医学科用問題)

関数 $g(x)$ を $g(x) = 8x(1-x)$ で定める。また、自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) を

$$f_1(x) = g(x)$$

$$f_{n+1}(x) = g(f_n(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、関数 $|f_n(x)|$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を a_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a_1 および a_2 を求めよ。
- (2) n が 2 以上の自然数のとき、次の命題 $P(n)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。
 $P(n)$: $a_n \geq 2$ であり、関数 $y = f_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の値域は $-a_n \leq y \leq 2$ である。
- (3) n が 2 以上の自然数のとき、 a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (4) n が 2 以上の自然数のとき、不等式 $8a_n^2 \leq a_{n+1} \leq 16a_n^2$ が成り立つことを示せ。
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log a_n)}{n}$ を求めよ。

<後期>

① 小問集合 (穴埋め) (数Ⅱ・B・Ⅲ)

次の \square に適する数を、解答用紙の指定のところに記入せよ。

- (1) 実数 α が $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$ を満たすとき、

$$\sin \alpha = \square \text{ア}, \quad \cos \alpha = \square \text{イ}$$

である。

- (2) 座標空間に平行四辺形 ABCD があり、 $A(8, 4, 3)$, $B(4, 2, 0)$, $C(-3, -3, 1)$ であるとき、頂点 D の座標は

$$(\square \text{ウ}, \square \text{エ}, \square \text{オ})$$

である。

- (3) 2つのベクトル \vec{u} , \vec{v} が $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{3}$,

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \square \text{カ}, \quad |\vec{u} + 2\vec{v}|^2 + |2\vec{u} + \vec{v}|^2 = \square \text{キ}$$

である。

(4) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \square \text{ク}$ である。

- (5) k を正の定数とする。双曲線 C が 2 点 $(2\sqrt{2}, 2)$, $(4, \sqrt{6})$ を通り、その漸近線が $y = \pm kx$ であるとき、双曲線 C の方程式は

$$\frac{x^2}{\square \text{ケ}} - \frac{y^2}{\square \text{コ}} = -1$$

であり、 $k = \square \text{サ}$ である。

② 小問集合 (数Ⅱ・Ⅲ)

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 a, b が

$$a > b > 1, \quad \log_a b + \log_b a = 4$$

を満たすとき、 $\log_a b - \log_b a$ の値を求めよ。

- (2) a を実数とする。関数 $f(x) = |x-1|(a-2x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき、 a の値を求めよ。

- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^k + 4^k}{6^k} + \frac{1}{k+n} \right)$ を求めよ。

③ 微分法 (数Ⅲ), 無限級数

関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、 $f(x)$ が極大値をとる x の値を小さいものから順に $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ とする。
 - (i) x_n を n を用いて表せ。
 - (ii) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の和を求めよ。

④ 微分法・積分法 (数Ⅲ)

関数 $f(x) = \sin x - x \cos x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq \pi$ で増加することを示せ。
- (2) 関数 $y = \int_x^{\pi} f(t) dt$ を x について微分せよ。
- (3) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^{\pi} |f(t) - f(x)| dt$$

により定義する。

- (i) $0 < x < \pi$ の範囲において、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。
- (ii) 区間 $0 \leq x \leq \pi$ における $g(x)$ の最小値を求めよ。

⑤ 複素数平面, 確率漸化式

i を虚数単位とし、 $\alpha = \sqrt{3} + i$ とおく。複素数平面上の点 P は、次の規則に従って動く。なお、 k は 0 以上の整数である。

- (a) 時刻 $t=0$ において、 P は点 1 にいる。
- (b) 時刻 $t=k$ において P が点 z にいるとき、時

刻 $t=k+1$ において、点 P は点 αz または点 $\frac{1}{\alpha}z$ のどちらかに、それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。

n を自然数とし、時刻 $t=n$ において P のいる点を表す複素数を z_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) α と $\frac{1}{\alpha}$ を極形式で表せ。ただし、偏角は、
 $-\pi$ より大きく、 π 以下とする。
- (2) $|z_{2n}|=1$ となる確率 p_n を求めよ。
- (3) z_{2n} が実数となる確率を q_n とする。
 - (i) q_1, q_2 を求めよ。
 - (ii) q_{n+1} を q_n を用いて表せ。
 - (iii) q_n を n を用いて表せ。

4 おわりに

どの問題も基本的な知識や技術が身に付いているか確認するのに適した良問であった。本校生徒はまだまだ基本が身に付いていない者が多くいることがわかり、またこれからの演習で強化したいポイントも浮き彫りになってきた。生徒にとっても気付きの多いよい復習になったのではないかと思われる。

[4] や [7](1) では、問題の条件や出題の意図を正確に読み取ることができていないことがわかった。共通テストでも、また社会に出てからも読解力が求められるため、今後の演習で読解力を鍛え、生きていくための力を身に付けさせたい。

また、速度・加速度を求めさせる問題が出たことは注目すべきことと感じる。大学の求める学力とは何か、情報を集め研究し、教科指導に反映させていきたい。