中四国の国公立大学入試問題の研究
―AO・推薦入試の問題から―

愛媛県立今治西高等学校　近本　優大

1　はじめに

四国地区には，5 つの国立大学，4 つの公立大学が設置されている。中国地方には，5 つの国立大学，12（令和 3 年度より叡啓大学が設置される）の公立大学が設置されている。国立大学では，約 23 %，公立大学では，約 32 %の生徒をAO・推薦入試により学生募集を行っている。私たちが生徒に指導する際，過去問を解かし，その傾向を見つけることで対策を講じることができると思う。そのため，中四国の国公立大学のAO・推薦入試問題で出題された数学の問題を取り上げた。

2　令和 2 年度四国の国公立大学AO・推薦入試問題

高知大学　理工学部　数学物理学科　(数学受験)　推薦入試 I

$\boxed{1}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

実数 x に対して，x より小さくない最小の整数を $\langle x\rangle$ と書くことにする。例えば，$\left\langle\dfrac{5}{3}\right\rangle=\langle 1.666\cdots\rangle=2$，$\langle\sqrt{5}\rangle=\langle 2.236\cdots\rangle=3$ である。x が整数のときは $\langle x\rangle=x$ である。

不等式

$$(x-\langle x\rangle)^2+(y-\langle y\rangle)^2>1 \tag{1}$$

をみたす実数の組 $(x,\ y)$ の範囲について考えてみよう。まず，$0<x\leqq 1$ のとき $\langle x\rangle=1$ であり，$0<y\leqq 1$ のとき $\langle y\rangle=1$ であることから，連立不等式

$$\begin{cases}0<x\leqq 1\\ 0<y\leqq 1\\ (x-1)^2+(y-1)^2>1\end{cases}$$

の表す xy 平面上の領域を D とおくと，領域 D に属する $(x,\ y)$ は(1)を満たす。次に，実数 $a,\ b$ と整数 $m,\ n$ に対して，

$$a-\langle a\rangle=a+m-\langle a+m\rangle$$
$$b-\langle b\rangle=b+n-\langle b+n\rangle$$

が成り立つので，もし $(x,\ y)=(a,\ b)$ のとき (1) が成り立つならば，$(x,\ y)=(a+m,\ b+n)$ のときも (1) が成り立つ。従って，整数 $m,\ n$ に対して，領域 D を x 軸方向に m，y 軸方向に n だけ平行移動した領域を $D_{m,n}$ とおくと，各 $m,\ n$ に対して，領域 $D_{m,n}$ に属する $(x,\ y)$ は (1) を満たす。このことから，領域 D をもとにして，(1) を満たす実数の組 $(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示することができる。

上の考え方を応用して，今度は，不等式

$$|x-\langle x\rangle|+|y-\langle y\rangle|>\frac{3}{2} \tag{2}$$

を満たす実数の組 $(x,\ y)$ の範囲について考えるとどうなるだろうか？

問 1．$(x,\ y)=\left(\dfrac{13}{4},\ \dfrac{21}{5}\right)$ のとき (1) が成り立つかどうか理由を付けて答えよ。

問 2．領域 D を図示せよ。

問 3．実数 a と整数 m に対して，$a-\langle a\rangle=a+m-\langle a+m\rangle$ が成り立つ理由を説明せよ。

問 4．(1) を満たす実数の組 $(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。なお，理由を書く必要はなく，答えのみでよい。

問 5．(2) を満たす実数の組 $(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。理由も説明せよ。

※ただし，$\langle\quad\rangle$ は，特殊記号 $\lceil\quad\rceil$ を表す。

$\boxed{2}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

0 以上 1 未満の実数を 2 進法での小数表記で表してみよう。x を 0 以上 1 未満の実数とする。このとき，各々の値が 0 または 1 であるような $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ で，

$$\frac{a_1}{2}\leqq x<\frac{a_1+1}{2}$$
$$\frac{a_2}{2^2}\leqq x-\frac{a_1}{2}<\frac{a_2+1}{2^2}$$
$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\leqq x-\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)<\frac{a_{n+1}+1}{2^{n+1}}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

を満たすものが存在する。このとき，x を 2 進法で

$$x=(0.a_1a_2a_3\cdots)_2$$

と表す。各 n に対して，a_n は x の 2 進法での小数第 n 位の数となる。ここでは，10 進法での小数表記と区別するために，2 進法での小数表記は $(\quad)_2$ を付けて書くことにする。すべての 0 以上 1 未満の実数はこのような 2 進法での小数表記をもつ。例として，$\dfrac{1}{3}$ の場合を説明しよう。

$$\frac{0}{2}\leqq\frac{1}{3}<\frac{1}{2} \tag{1}$$

を満たすので，小数第 1 位の数は 0 と決まる。次に

$$\frac{1}{2^2}\leqq\frac{1}{3}-\frac{0}{2}<\frac{2}{2^2} \tag{2}$$

を満たすので，小数第 2 位の数は 1 と決まる。さらに

$$\frac{0}{2^3}\leqq\frac{1}{3}-\left(\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}\right)<\frac{1}{2^3} \tag{3}$$

を満たすので，小数第 3 位の数は 0 と決まる。さらに続けて

$$\frac{1}{2^4}\leqq\frac{1}{3}-\left(\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}\right)<\frac{2}{2^4} \tag{4}$$

を満たすので，小数第 4 位の数は 1 と決まる。(3) 式の各辺を 4 倍すると (1) 式と同じであり，(4) 式の各辺を 4 倍すると (2) 式と同じであることに注意すれば，以下同様に，小数第 5 位以降も，0 と 1 を交互に繰り返す。よって，$\dfrac{1}{3}$ の 2 進法での小数表記は，$\dfrac{1}{3}=(0.010101\cdots)_2$ となる。この $\dfrac{1}{3}$ の 2 進法での小数表記のように循環する部分をもつ場合には，繰り返す部分の最初と最後がわかるように数字の上側に点を付けて，$\dfrac{1}{3}=(0.\dot{0}\dot{1})_2$ のような表し方を用いることにする。なお，$\dfrac{1}{2}$ のように 2 進法での小数表記で，ある箇所以降，0 だけを繰り返す場合には $\dfrac{1}{2}=(0.1000\cdots)_2$ の代わりに $\dfrac{1}{2}=(0.1)_2$ のような表し方も用いる。

2 進法を用いると見通しが良くなるような例題を紹介しよう。

例題　関数 $f,\ g$ をそれぞれ $f(x)=\dfrac{x}{2}$，$g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ で定義する。

$0\leqq x_0<1$ を満たす実数 x_0 を取る。さらに，$f,\ g$ と x_0 を用いて，数列 $\{x_n\}$ を帰納的に $x_1=f(f(g(g(x_0))))$，$x_n=f(f(g(g(x_{n-1}))))$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により，定義する。このとき，正の整数 n に対して不等式 $\left|x_n-\dfrac{1}{5}\right|\leqq\dfrac{1}{2^{4n}}$ が成り立つことを示せ。

この例題を解くのに，2 進法を使ってみよう。$0\leqq x<1$ を満たす実数 x が，2 進法で $x=(0.b_1b_2b_3\cdots)_2$ と表されていたとする。このとき，$f(x)$，$g(x)$ はそれぞれ 2 進法で $f(x)=(0.0b_1b_2b_3\cdots)_2$，$g(x)=(0.1b_1b_2b_3\cdots)_2$ と表される。このことを用いると，x_0 が 2 進法で $x_0=(0.c_1c_2c_3\cdots)_2$ と表されているとき，正の整数 n に対して x_n を 2 進法で表すことができる。x_n の 2 進法での小数表記と $\dfrac{1}{5}$ の 2 進法での小数表記を見比べることで，正の整数 n に対して不等式 $\left|x_n-\dfrac{1}{5}\right|\leqq\dfrac{1}{2^{4n}}$ がすぐに示される。

問1．文章中の $\frac{1}{3}$ の2進法での小数表記の説明にならって，

$\frac{1}{5}=(0.\dot{0}01\dot{1})_2$ と表されることを説明せよ。

問2． $0\leqq x<1$ を満たす実数 x が，2進法で $x=(0.b_1b_2b_3\cdots)_2$ と表されていたとする。このとき， $f(x)$, $g(x)$ はそれぞれ2進法で $f(x)=(0.0b_1b_2b_3\cdots)_2$， $g(x)=(0.1b_1b_2b_3\cdots)_2$ と表されることを説明せよ。

問3． x_0 が2進法で $x_0=(0.c_1c_2c_3\cdots)_2$ と表されているとき， $x_1=f(f(g(g(x_0))))$ の2進法での小数表記を求めよ。ただし，解答までの過程を説明すること。

問4．2進法での小数表記を用いて，正の整数 n に対して不等式

$\left|x_n-\frac{1}{5}\right|\leqq\frac{1}{2^{4n}}$ が成り立つことを示せ。

高知大学　医学部医学科　AO入試Ⅰ

Ⅰ　AB=6，BC=3，CD=$5-x$，DA=x ($0<x<5$) を満たす四角形ABCDが円に内接している。次の設問に答えなさい。

設問1　$\cos\angle\mathrm{BAD}+\cos\angle\mathrm{BCD}=0$ となることを示しなさい。

設問2　$\cos\angle\mathrm{BAD}$ を x の式で表しなさい。

設問3　$\sin\angle\mathrm{BAD}$ を x の式で表しなさい。

設問4　四角形 ABCDの面積 $S(x)$ を求めなさい。

設問5　設問4の $S(x)$ の最大値を求めなさい。またそのときの x の値を求めなさい。

Ⅱ　次の設問に答えなさい。

設問1　$y=|4x^2-8x+3|$ のグラフの概形をかきなさい。

設問2　aを1でない自然数とする。不等式 $(\log_a x)^2-\log_a x^3+2<0$ をみたす自然数 x がただ1つだけ存在するとき， a の値と，上記の不等式をみたすただ1つの自然数 x を求めなさい。

Ⅲ　$f(x)=x^3+3x^2-4x-5$ とし，Oを原点とする座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の接線を l とおく。 l が直線 $x=-2$ と交わる点をQ，直線 $x=2$ と交わる点をRとおく。このとき，次の設問に答えなさい。

設問1　接線 l の方程式を求めなさい。

設問2　接線 l の y 切片を $g(t)$ とおくとき， $-2<t<2$ の範囲で， $g(t)$ の増減表をかき， $u=g(t)$ のグラフの概形を tu 平面上にかきなさい。

設問3　t が $-2<t<2$ お範囲にあるとき，三角形OQRの面積を t を用いて表しなさい。

設問4　$t<2$ とする。 l と C が $t<x<2$ の範囲で交点Uを持つような t の範囲を求めなさい。

設問5　t が設問4で求めた範囲にあるとする。設問4の点Uに対して，線分PUと C とで囲まれる部分の面積と，線分URと C と直線 $x=2$ とで囲まれる部分の面積が等しくなるような t の値を求めなさい。

高知工科大学　システム工学群　AO入試

問1

t を実数とする。また， $\vec{a}=(t,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ 1,\ 2)$ とおく。このとき，以下の(1)〜(4)に答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を t を用いて表せ。

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2$ を t を用いて表せ。

(3)　$|\vec{a}-\vec{b}|\leqq\sqrt{11}$ を満たすような t の値の範囲を求めよ。

(4)　(3)のとき， $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直とならないことを証明せよ。

問2

Oを原点とする座標平面上に2点A(7, 0)，B(3, 4)がある。$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする。このとき，以下の(1)〜(4)に答えよ。

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\cos\theta$ を $\cos\frac{\theta}{2}$ の式で表せ。

(3)　$\cos\frac{\theta}{2}$ と $\tan\frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

(4)　△OABの内接円の半径 r と中心の座標を求めよ。

問3

$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ とおく。このとき，以下の(1)〜(3)に答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2)　k を正の定数とする。方程式 $f(x)=k$ がちょうど2個の異なる実数解をもつように， k の値を定めよ。

(3)　(2)のとき，直線 $y=k$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

高知工科大学　情報学群　AO入試

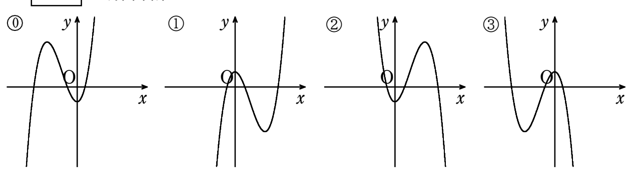
以下の問1～3のすべてに解答しなさい。問2･3は解答の過程も記述しなさい。

問1．関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3+3ax^2+a^2$ とし (a は定数)， $y=f(x)$ のグラフの概形について考える。以下の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$， $\boxed{\text{キ}}$ にあてはまる数をそれぞれ答えなさい。また，空欄 $\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$， $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に入れるのに最も適当なものを下の解答群のうちから一つずつ選びなさい。

(1)　まず，定数 a に具体的な値を代入して考えてみよう。 $a=-1$ のときの関数 $f(x)$ を $g(x)$ と呼ぶ。 $g(x)=x^3-3x^2+\boxed{\text{ア}}$ である。

関数 $g(x)$ を x で微分すると， $g'(x)=3x^2-\boxed{\text{イ}}x$ である。ここで $g'(x)=0$ を解くと $x=0$ と $x=\boxed{\text{ウ}}$ を得る。 $y=g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群



(2)　次に元の関数 $f(x)$ について考えよう。

関数 $f(x)$ を x で微分すると， $f'(x)=\boxed{\text{オ}}$ である。$f'(x)=0$ を解くと $x=0$ と $x=\boxed{\text{カ}}$ を得る。これから，定数 a のいくつかの場合について， $y=f(x)$ のグラフの概形を考える。

(i) $a=\boxed{\text{キ}}$ のとき， $f'(x)=0$ の解は重解となる。 $a=\boxed{\text{キ}}$ のときの $y=f(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(ii) $a>\boxed{\text{キ}}$ のとき， $f'(x)=0$ の二つの解と0と $\boxed{\text{カ}}$ を比較すると0の方が大きい。したがって，関数 $f(x)$ は $x=0$ において $\boxed{\text{ケ}}$ 。 $a>\boxed{\text{キ}}$ のときの $y=f(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{コ}}$ である。

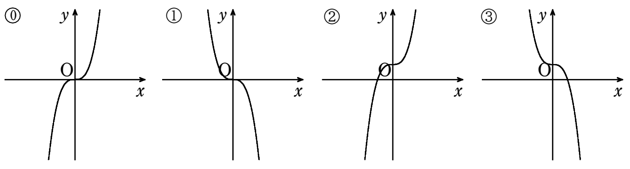
$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $3x^2+6x$　① $3x^2-6x$　② $3x^2+6ax$　③ $3x^2-6ax$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 2　① -2　② $2a$　③ $-2a$

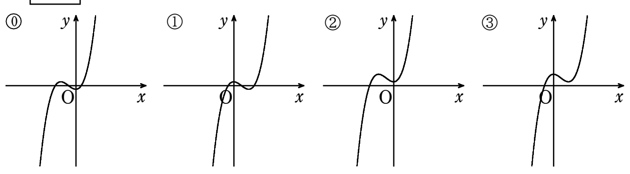
ク の解答群



ケ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 原点を通る

コ の解答群



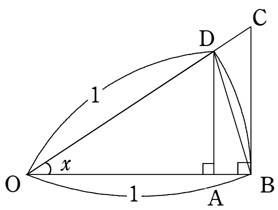
問２．関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3+3x$ とし，k を実数の定数とする。二つの曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=f(x-k)-8$ がある点 $(p,\ q)$ で接する。すなわち，曲線 C_1 と C_2 は点 $(p,\ q)$ を通り，かつ，曲線 C_1 の点 $(p,\ q)$ における接線と曲線 C_2 の点 $(p,\ q)$ における接線とが一致する。このとき k の値を求めよ。

問３．角の単位は弧度法とする。

(1)　下の図を参考にして，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$\sin x<x<\tan x$$

であることを証明せよ。



(2)　(1) の結果を用いて

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を証明せよ。

高知工科大学　経済・マネジメント学群　AO入試

Ⅰ 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1)　$x-\dfrac{1}{x}=5$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ。

(2)　三角形 ABC において，AB=3，BC=5，CA=7 のとき $\sin A$ の値を求めよ。

(3)　x は $2\leqq x\leqq 7$ をみたす実数とする。次のデータについて，中央値と平均値の差の絶対値が 1 以下となるような x の値の範囲を求めよ。

$$2,\ x,\ 7,\ 7,\ 8$$

(4)　大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の積が 4 の倍数になる場合は何通りあるか。

(5)　男子 3 人と女子 4 人がくじ引きで一列に並ぶとき，男子が隣り合わない確率を求めよ。

(6)　$(x-2)^7$ を展開したときの x^4 の係数を求めよ。

(7)　2 次方程式 $x^2-5x-2=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$\alpha-1,\ \beta-1$ を解とする 2 次方程式を 1 つつくれ。

(8)　不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ を満たす $x,\ y$ に対して，$x+2y$ の最大値を求めよ。

(9)　不等式 $\log_2 x+\log_2(3-x)\leqq 1$ を解け。

(10) 関数 $y=x^2-4x+9$ のグラフに原点から引いた接線のうち，傾きが小さい方の方程式を求めよ。

(11) 三角形 OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 1 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(12) n を自然数とする。和 $1\cdot1+2\cdot5+3\cdot5^2+\cdots+n\cdot5^{n-1}$ を求めよ。

Ⅱ　k を実数とする。xy 平面上において，2 次関数 $y=x^2-2(k+1)x+4k+1$ で表される放物線の頂点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　$X,\ Y$ をそれぞれ k を使って表せ。

(2)　$Y>0$ となるような k の値の範囲を求めよ。

(3)　k が実数全体を動くときの点 P の軌跡 C を求め，$x,\ y$ の方程式で表せ。

(4)　(3) の曲線 C と x 軸，直線 $x=4$ で囲まれた 2 つの部分のうち，$y\leqq 0$ をみたす部分の面積を求めよ。

Ⅲ　次の定理とその証明を読み，後の問に答えよ。

[定理] $m,\ n$ を 2 以上の互いに素である自然数とする。このとき，$ma+nb$ ($a,\ b$ は 0 以上の整数) の形にかけない自然数全体の集合を S とすると，S に属する最大の自然数は $mn-m-n$ である。

[証明] まず，$mn-m-n\in S$ であることを背理法によって示す。$mn-m-n\notin S$ と仮定すると，$mn-m-n=ma+nb$ となる 0 以上の整数 $a,\ b$ が存在する。このとき

$$m(n-a-1)=n(b+1) \qquad (\bigstar)$$

が成り立つ。右辺は n で割り切れるから左辺も n で割り切れ，m は n と互いに素だから n は $n-a-1$ を割り切る。このとき (ア) $n-a-1\leqq 0$ であるから，$(\bigstar)$ より $n(b+1)\leqq 0$ となり矛盾が生じる。したがって $mn-m-n\in S$ である。

次に，k を $mn-m-n+1$ 以上の任意の自然数とし，$k\notin S$ であることを示す。$m,\ n$ は互いに素だから

$$mx+ny=k+m+n$$

をみたす (イ) 整数 $x,\ y$ が存在する。$mq<y\leqq m(q+1)$ を満たす整数 q をとる。このとき，

$$mx+ny\leqq mx+mn(q+1)=m(x+nq+n)$$

であるから

$$m(x+nq+n)\geqq_{(ウ)} k+m+n\geqq mn+1>mn$$

が成り立つ。よって $x+nq+n>n$ だから $x+nq>0$ である。したがって

$$a=x+nq-1,\ b=y-mq-1$$

とおくと，$a,\ b$ は 0 以上の整数で

$$\begin{aligned} ma+nb&=m(x+nq-1)+n(y-mq-1)\\ &=mx+mnq-m+ny-mnq-n\\ &=k+m+n-m-n=k \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $k\notin S$ である。

以上より定理は示された。

[設問]

(1)　$5a+7b$ ($a,\ b$ は 0 以上の整数) の形にかける 24 以下の自然数をすべて求めよ。答えのみでよい。

(2)　下線部 (ア) の理由をわかりやすく説明せよ。

(3)　下線部 (イ) においては，一般に次の命題が成り立つという事実が用いられている。

命題 m，n を互いに素である自然数とする。このとき，任意の整数 N に対して，$mx+ny=N$ をみたす整数 x，y が存在する。

この命題に関して，次の (a) (b) の問に答えよ。

(a) $m=5$，$n=2$ のとき，$mx_0+ny_0=1$ をみたす整数 x_0，y_0 が存在することを証明せよ。

(b) $m=5$，$n=2$ のとき，任意の自然数 N に対して $mx+ny=N$ をみたす整数 x，y が存在することを証明せよ。

(4) 下線部 (ウ) の理由をわかりやすく説明せよ。

(5) $17a+11b=162$ をみたす 0 以上の整数 a，b を一組求めよ。
必要なら

$$17\cdot 17+11\cdot(-9)=190,\quad 17\cdot(-1)<-9\leqq 17\cdot 0$$

であることを用いてよい。

3 まとめ

令和 2 年度の四国地方のAO入試と推薦入試の問題の中で，数学の内容に関するものを取り上げた。平成 31 年度の問題と比較してみると，高知工科大学において，経済・マネジメント学群以外のシステム工学群，情報学群でも数学的な内容が出題されるようになった。高知大学では，理工学部数学物理学科で，数学的な内容の問題文から，その内容について説明を求められたり，証明をしたりするような読解力が求められる問題が多く出題されていた。医学部医学科で，総合問題 I において，英語と数学の問題を出題していた。内容としては基礎的なものも多くあった。高知工科大学では，システム工学群で，基本的な大問を 3 題，情報学群で，マーク形式の問題と証明の問題，経済・マネジメント学群で，小問集合と大問，読解力を問う問題が出題されていた。出題傾向としては大きく変わっておらず，過去問を利用して対策をしていく必要がある。また，読解力や新しい発想を問うような問題が出題されており，普段から問題を読み込み，自分の頭をアクティブにする学習の方法を定着させる必要があると感じた。