中四国の国公立大学入試問題の研究

―ＡＯ・推薦入試の問題から―

愛媛県立松山北高等学校　山田　一貴
愛媛県立三島高等学校　　脇　　智城

1　はじめに

2000 年度、東北大、筑波大、九州大の３校で始まった国立大のＡＯ入試では今年で 10 年余りが経過し、年々成熟と進化を図ろうとしている。

今年度入試での形態別の学校数では、国立大学 82 校中、ＡＯ入試実施校が 47 校、推薦入試実施校が 75 校、公立大学 84 校中、ＡＯ入試実施校が 20 校、推薦入試実施校が 82 校にのぼる。入学者比率を見てみると、国立大の全入学者約 10 万人のうち、推薦＋ＡＯ入学者は約 15％の約１万５千人、公立大学約２万９千人のうち、推薦＋ＡＯ入学者は約 25％の７千 5 百人を占めている。ＡＯ入試に関しては、国公立大学の総定員約３千人に対して、志願者数は約１万１千人を超えている。

ＡＯ入試に関しては、推薦・一般入試にはなかった、新しい人材発掘の理念と戦略を備えている。その傾向は、名古屋工大の「工学創成プログラム」、愛媛大の「スーパーサイエンス特別コース」、九州大の「21 世紀プログラム」など、ＡＯ入試に特別なプログラムが組み込まれていることでも明らかである。推薦入試では、医療・教育分野などで「地元枠」あるいは「地域優遇型」の推薦入試が増加している。2004 年度の独立法人化以降、教育分野では、いわゆる団塊世代の大量退職に伴い、特に過疎地、へき地の教員を志す者の不足、地域医療では、医師不足などの地域の問題に対して、各地域との連携を強化している。また、看護系でも増加しつつある。

しかし、近年一般入試による入学者との学力格差等が問題視され、センター試験利用型への移行やＡＯ・推薦入試の廃止など、各大学で基礎学力重視へ傾斜しているのも事実である。文部科学省は 2011 年度の通達で、ＡＯ入試に限らず全入試において「合格から入学までの学習喚起」を講ずるよう、初めて全大学に求めた。今後はいっそう入学準備教育の充実が進むと期待される。特に、入学準備教育はＡＯ全体のプロセスを形成する一環であるため、大学の教育プログラムへの熱意・向上心に欠ける受験生は、最悪の場合、合格を取り消すと要項に明記している大学もあることを忘れてはならない。

出題問題の中から、昨年度の中四国の国公立大学のＡＯ・推薦入試で実際に出題された数学の問題を取り上げてみる。

2　平成２６年度四国の国公立大学推薦入試問題から（抜粋）

以下に推薦入試における教科面接の質問内容を紹介する。

- $2x^2-5x-3<0$，$x^2-x-6<0$ の共通範囲を求めよ。

（愛媛大　工　環境建設工　推薦）

- $y=2x^5+3x^2+2x+3$ を微分せよ。
- 不定積分 $\int(3x+2)^2dx$ を求めよ。

（愛媛大　工　機能材料工　推薦）

- $y=\sqrt{2-\sin x}$ 、$y=e^x(\log x)^2$ を微分せよ。
- $\sum_{k=1}^{n}(12k^2-4k+1)$ を n の式で表せ。
- 1 から 25 の数字について、2 の倍数または 3 の倍数はいくつあるか。
- $y=\log(x+1)$ 、$y=1$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに一回転させてできる図形の体積を求めよ。
- 赤玉 1 個、青玉 2 個、白玉 3 個が同じ袋の中に入っている。この袋の中から 1 個取り出し，確認してからまた元に戻す。白玉が出た時点で終了とする。2 回目で終わるとき 100 円もらえ，3 回目で終わると 300 円もらえる。このときの期待値を求めよ。

（徳島大　工　知能情報工学　推薦）

3　平成２６年度四国の国公立大学ＡＯ・推薦入試問題から

愛媛大学　理学部　数学総合　ＡＯ入試

【第１問】

次の $\boxed{}$ に入る数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　複素数 $1+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{(1+i)^2}$ の実部は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$(x^2-x-1)^6$ の展開式における x の係数は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3)　a を実数とする。座標空間内の 4 点　O$(0,0,0)$，P$(1,-2,3)$，Q$(2,-1,1)$，R$(a-1,-a,a-2)$ が同一平面上にあるとき，$a=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4)　10 本の当たりくじが 4 本ある。このくじを 1 本引き，当たったときはくじは元に戻さず，はずれたときは元に戻すとする。3 人が順に 1 本ずつくじを引くとき，2 人だけが当たりくじを引く確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) $0<a<1$ とするとき，$\int_0^a \frac{dx}{1-x^2}=\log 2$ なら

$a=\boxed{\text{オ}}$ である。

(5) 曲線 $y=\sqrt[3]{x^2}$ と直線 $y=|x|$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

【第２問】

次の命題の真偽を判定し，解答用紙に書かれた真または偽のいずれか一方の文字に○を付けよ。さらに，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(1) 3次関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して，$f(1)=g(1)$，$f(2)=g(2)$，$f(3)=g(3)$ ならば，すべての実数 x に対して $f(x)=g(x)$ である。

(2) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である。

(3) X を2次の正方行列，E を2次の単位行列，O を2次の零行列とする。このとき，$X^2-X=O$ ならば $X=O$ または $X=E$ である。

(4) n を2以上の整数とするとき，2^n-1 が素数ならば n も素数である。

【第３問】

座標平面上の点 (x, y) を原点を中心として角 θ だけ回転して移される点を (x', y') とするとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

【第４問】

関数 $f(x)=\left|x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|$ について次の問いに答えよ。ここで，記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数を，$|x|$ は x の絶対値を表す。

(1) $y=\left[x+\frac{1}{2}\right]$ のグラフをかけ。

(2) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3) 定積分 $\int_0^1 e^{-x}f(x)dx$ の値を求めよ。

(4) 極限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}f(x)dx$ の値を求めよ。

高知大学　理学部　数学分野　推薦入試

【第１問】

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

n を2以上の自然数とし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を自然数とする。

$$a_1a_2\cdots a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

の解を知りたい。しかし，n を任意の自然数としたまま解決するのは難しそうだ。いくつかの条件をつけて考えてみよう。

そこでまず，$n=2$ の場合について考えてみることにする。このとき，方程式①は $a_1a_2=a_1+a_2$ である。$a_1 \leqq a_2$ であるから，$a_1a_2=a_1+a_2 \leqq a_2+a_2=2a_2$ となるので，$a_2(2-a_1) \geqq 0$ が成り立つ。a_1 と a_2 は自然数だから，$a_1=1$ または2である。$a_1=1$ を①に代入すると $a_2=a_2+1$ となるため，解は存在しない。$a_1=2$ を① に代入すると $2a_2=a_2+2$ となるため，$a_2=2$ である。ゆえに，解は $(a_1, a_2)=(2, 2)$ であることがわかった。

次に，$n \geqq 3$ の場合を考える。まず，a_1 の値を求めてみよう。方程式①と条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ から，(1)$a_n(n-a_1^{n-1}) \geqq a_n(n-a_1\cdots a_{n-1}) \geqq 0$ が成り立つことが示される。ここで一般に(2)$n \geqq 3$ とすると $n<2^{n-1}$ が成り立つ。この2つの不等式からつねに $a_1=1$ となることが示される。一方で，すべての $a_i (i=1, 2, \cdots, n)$ を1とすると n は3以上なので①は成立しない。そこで，$a_i=1$ となる最大の i を求めてみよう。最初に(3)$a_{n-1}=1$ とすると①をみたす a_n が存在しないことがわかる。次に，$a_{n-2}=1$ としてみる。すると①を満たす解が存在することがわかる。特に(4)$n-1$ が素数の場合にはこのような解はただ一組ある。

問１．下線部(1)を示せ。

問２．下線部(2)を示せ。

問３．下線部(3)を示せ。

問４．下線部(4)を示せ。

問５．少なくとも2組の解を持つ n を1つ挙げよ。また，その場合の2組の異なる解を求めよ。

【第２問】

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

xy 平面における有理点とはその x 座標，y 座標がともに有理数で表せるような点のことをいう。例えば，$\left(2, \frac{1}{3}\right)$ は有理点であり，$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ は有理点ではない。

まず，有理点と直線の関係を考えてみよう。2つの異なる有理点をPとQとする。(1)PとQを通る直線の方程式の係数はすべて有理数とできる。また，(2)平行でない2本の直線の方程式の係数がすべて有理数であれば，その交点は有理点となる。

次に円について考えてみよう。(3)原点を中心として，半径の2乗が有理数とはならないような円の周上には有理点は1つもない。それでは円周上に有理点がある場合に，その個数

を調べてみよう。まず，上の有理点と直線の関係から「(4)異なる3つの有理点を通る円の中心は有理点である」ことを導けることに注意しよう。このことから次の2つを示すことができる。

（i） 円$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$ の周上には有理点は1つだけある。

（ii） 円$(x-\sqrt{2})^2+y^2=3$ の周上には有理点は2つだけある。

それでは，円周上に3つ以上の有理点があるような円はどのようなものだろうか。よく知っている円がその例になるかもしれない。

問1．下線部(1)を示せ。

問2．下線部(2)を示せ。

問3．下線部(3)を示せ。

問4．下線部(4)を用いて(i)を示せ。

問5．下線部(4)を用いて(ii)を示せ。

問6．円周上に3つ以上の有理数があるような円を1つ挙げて，その有理点について考察せよ。

【第3問】

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

2次方程式

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \cdots\cdots ①$$

が与えられたときに，その左辺を(1)平方完成することにより解を求めることができる。この解を表す式を2次方程式①の解の公式と呼ぶ。さらに，①の2つの解と①の係数には関係式がある。これを(2)解と係数の関係と呼ぶ。

今度は3次方程式

$$x^3+3ax+2b=0 \cdots\cdots ②$$

の解の公式を考えてみよう。$b=0$ のときは2次方程式を解くことに帰着されるので，$b\fallingdotseq 0$ としよう。$x=u+v$ とおくことにし，②に代入する。すると，(3)$x=u+v$ が②の解となる十分条件として次の2式が得られる。

$$u^3+v^3+2b=0$$
$$(a+uv)(u+v)=0$$

ここで，$u+v\fallingdotseq 0$ であるから，解と係数の関係を考えることにより(4)u^3 と v^3 はある2次方程式の解であることがわかる。この方程式の解を p と q とする。u と v はこれらの3乗根であるから，それぞれ3つある。そこで，p の3乗根 $\sqrt[3]{p}$ と q の3乗根 $\sqrt[3]{q}$ は $\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}=-a$ を満たすものとする。今，$x^3=1$ の解を1，ω，ω^2 とすると p と q の3乗根はそれぞれ，$\sqrt[3]{p}$，$\omega\sqrt[3]{p}$，$\omega^2\sqrt[3]{p}$ と $\sqrt[3]{q}$，$\omega\sqrt[3]{q}$，$\omega^2\sqrt[3]{q}$ となる。(5)これらの u と v の組み合わせのうち上の十分条件を満たすものは次の3つである。

$$\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q},\ \omega\sqrt[3]{p}+\omega^2\sqrt[3]{q},\ \omega^2\sqrt[3]{p}+\omega\sqrt[3]{q}$$

これが3次方程式②の解の公式である。

問1．下線部(1)の方法を用いて2次方程式①の解の公式を求めよ。

問2．下線部(2)の2次方程式の解と係数の関係を示せ。

問3．下線部(3)を示せ。

問4．下線部(4)に書かれている2次方程式を示し，さらにその解を求めよ。

問5．下線部(5)を示せ。

高知工科大学　マネジメント学部

数理マネジメントプログラム　AO入試

【第1問】

次の各問いに答えよ。

(1) a,b,x,y を正の実数として，不等式

$$(ax+by)^2\leqq(a^2+b^2)(x^2+y^2) \quad \cdots①$$

を証明せよ。また，a,b,c,x,y,z を正の実数として，不等式

$$(ax+by+cz)^2\leqq\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}+cz\right)^2$$
$$\leqq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \quad \cdots②$$

を証明せよ。

(2) xy 平面において，連立不等式

$$\begin{cases} x^2-1\leqq y \\ y\leqq 2x^2-4x+2 \\ y\leqq 2x^2+4x+2 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ。

(3) 0から9までの数字を1つ書いたカードがそれぞれ1枚ずつある。この中から3枚をとり，1番大きい数を百の位、2番目に大きい数を十の位，1番小さい数を一の位として，3桁の整数をつくる。例えば，$\boxed{3}$，$\boxed{2}$，$\boxed{7}$をとった場合は，732をつくる。このようなつくりかたは何通りあるか。また，この3桁の整数が500以上になる場合は何通りあるか。

(4) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が条件

$$|\vec{a}|=7,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=5$$

を満たすとき，$|\vec{b}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

【第２問】

△ABCにおいて，∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とする。このとき

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC} \qquad \cdots①$$

が成り立つことを証明したい。次の各問に答えよ。

(1)　点 D から 2 直線 AB，AC に下ろした垂線を DE，DF とするとき，DE ＝ DF が成り立つことを証明せよ。さらにこの事実を用いて①を証明せよ。

(2)　∠BAD ＝ ∠CAD ＝ θ とおいて，△ABD と△ACD の面積を θ を用いて表せ。さらにこの結果を用いて①を証明せよ。

(3)　(1)，(2) 以外の方法を用いて①を証明せよ。ただし，複数の方法を思いついても，一通り書けばよい。

【第３問】

等式

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}j^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad \cdots(*)$$

がすべての自然数 n について成り立つことを証明したい。次の各問に答えよ。

(1)　$n=5$ のとき，(*) の左辺を記号 Σ を用いない形で表せ。

(2)　等式 (*) が $n=1$ の場合について成り立つことを証明せよ。

(3)　k を自然数とするとき，

$$(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2$$

を簡単にせよ。

(4)　等式 (*) がすべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

【第４問】

θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たす角とする。連立不等式

$$\cos\theta \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

の表す xy 平面上の領域を D_1，3 点 (0, 0)，($\cos\theta$, $\sin\theta$)，(0, 1) を頂点とする三角形の周および内部を D_2 とする。領域 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とし，$S_1+S_2=S$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき，領域 D_1，D_2 を図示せよ。また，このときの S_1，S_2 の値を求めよ。必要ならば半径 r の円の面積が πr^2 であることを用いて良い。

(2)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，S_1，S_2 を θ で表せ。

(3)　θ の値を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させて，S を θ の関数と考える。$\frac{dS}{d\theta}$ を求めよ。

(4)　(3) のとき，S の最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

4　まとめ

ＡＯ入試と推薦入試の問題の筆記試験・教科面接の問題の一部を紹介した。教科面接においては、問題の難易度は高くないものの、生徒自身の表現力が問われるのではないかと思われる。入試に限らず、新教育課程における言語活動の充実を図るためにも、普段の授業の中から表現力を身に付けさせていきたい。

筆記試験においては、数学的な見方や考え方を問われる問題に加え、基礎・基本が問われる問題や、読解力を問われる問題が出題される傾向にある。問題文を読んで流れをしっかりとつかみ、正しい推論をしていく力やその考えを式や図で表現できる力を身に付けていくことが求められる。また、定義や定理をきちんと理解し、説明できるような力も必要である。普段から教科書に書かれてあることをきちんと読み、理解を深めたり、疑問を持ったりする探求心を持つことが大事であると思われる。

センター試験を使わないＡＯ・推薦入試では、試験日が９月から１１月にあるため、それまでに十分な学力を身に付けなければならない。当然、一般入試に向けた学習も平行して行わなければならないので、生徒の状況に応じて受験をさせるべきか判断していかなければならない。ＡＯ・推薦入試も頭に入れながら、国公立大学の受験を考えていくことが３年生の担任には求められていくが、安易に受験機会を増やす手段として考えていくことは危険であると思われる。

５　平成２６年度中国の国公立大学ＡＯ入試問題から

広島大学　理学部　数学科　筆記試験問題

［１］　実数θは$-\pi \leq \theta \leq \pi$の範囲を動くものとする。定数$\alpha$を$0 \leq \theta < \pi$の範囲にとるとき，$\cos\theta + \cos(\theta + \alpha)$の最大値およびその最大値を与える$\theta$の値をそれぞれ$\alpha$を用いて表せ。

［２］　aを定数とする。xy平面上の点Ｐの座標を（s, t）とする。y軸に関してＰと対称の位置にある点をＱとする。点Ｏをxy平面の原点とする。点Ｐが等式$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = a$を満たして動くとき，以下の問いに答えよ。

(1)　Ｑの座標をs, tを用いて表せ。

(2)　線分ＯＰの長さが取り得る範囲を求めよ。

(3)　ＰはＯと異なるとする。$\angle POQ$の値が取り得る範囲を求めよ。

(4)　$\triangle OPQ$が正三角形となるときがあるようなaの条件を求め，そのときのＰの座標を求めよ。

［３］　関数$f(x) = xe^{-x}$を$x \geq 0$の範囲で考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$と$f''(x)$を求め，関数$y = f(x)$のグラフの概形を描け。ただし，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$は既知としてよい。

(2)　点Ｐ（$t, f(t)$）におけるグラフの接線がx軸と交わる点をＱとする。Ｑの座標を求めよ。ただし$t > 1$とする（以下の問いにおいても同様）。

(3)　線分ＯＱの長さの最小値を求めよ。ただしＯは原点である。

(4)　線分ＯＱの長さが最小になるとき，線分ＯＱ，線分ＰＱ，および$y = f(x)$のグラフで囲まれる図形の面積Ｓを求めよ。

［４］　a, bは正の定数とし，xy平面上の放物線$P : y = ax^2 - b$とx軸の交点をＡ（$\alpha, 0$），Ｂ（$\beta, 0$）（$\alpha < \beta$）とする。線分ＡＢを１：２に内分する点が（$-\frac{1}{3}, 0$）であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　α, βを求めよ。またaをbを用いて表せ。

(2)　放物線Ｐと円$C : x^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$の共有点の個数を求めよ。

広島大学　理学部　物理科学科　筆記試験問題

（総合評価方式Ⅰ型）（抜粋）

［１］　次の問いに答えよ。解答用紙には，その導き方も記述せよ。

問１．次の微分積分に関する問いに答えよ。

(1)　関数$y = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{\sqrt{x+1}}$（$x > -1$）を微分せよ。

(2)　定積分$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$を求めよ。ただし，$a$は正の定数とする。

問２．２次曲線$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$について，以下の問いに答えよ。

(1)　この曲線の種類は，円，楕円，双曲線，放物線のうち，どれであるかを答えよ。また，曲線の形状を図示せよ。x軸，y軸との交点の座標も示せ。

(2)　この曲線と直線$y = ax$が交わるための，aの値の範囲を求めよ。

(3)　この曲線と直線$y = ax$が交わって２つの交点ができるとき，２つの交点の中点の座標を求めよ。

(4)　直線の傾きaを変化させたとき，曲線と直線の２つの交点の中点が描く軌跡を求めて図示せよ。

問３．xy座標平面上に点Ａ(3，0)と点Ｂ(1，5)がある。原点をＯとする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分ＯＡの中点をM，線分ＯＢを３：２に内分する点をＮとする。線分ＡＮと線分ＢＭの交点をＰとするとき，点Ｏに関する点Ｐの位置ベクトル$\vec{p}$を点Ａの位置ベクトル$\vec{a}$と点Ｂの位置ベクトル$\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　点Ｂを通り，ベクトル$\vec{b}$に垂直な直線lと点Ａとの距離を求めよ。

広島大学　工学部　第二類(電気・電子・システム・情報系)
小論文問題（抜粋）
問２．二つの自然数m，n（$m \geqq n$）の最大公約数について考える。

(1)　$m=1001$，$n=364$とするとき，mとnをそれぞれ素因数分解して，最大公約数を求めよ。

(2)　mとnの最大公約数は次の手続き(互除法)でも求めることができる。

Step 1：$n=0$ならmが最大公約数。
Step 2：mをnで割った余りを新たなn，もとのnを新たなmとしてStep 1に戻る。

互除法をつかって，$m=1001$，$n=364$の最大公約数を求めたときの，mとnの変化を記述せよ。

(3)　互除法で最大公約数が求められることの証明を以下の手順で行え。

(a)自然数gがmとnの公約数であるとき，$m=ga$と$n=gb$となる自然数aとbがある。gがmとnの最大公約数であるとき，aとbにはどのような関係があるか。
(b)$m=qn+r$とする自然数q，rがあるとき，mとnの公約数dがnとrの公約数になることを示せ。
(c)$m=qn+r$とする自然数q，rがあるとき，mとnの最大公約数gがnとrの最大公約数になることを示せ。
(d)互除法で最大公約数が求められることを証明せよ。

(4)　一般的に,素因数分解によって最大公約数を求めるよりも,互除法の方が簡単に最大公約数を求めることができる。
整数同志の割り算回数(商と余りを求める計算の回数)の観点から二つの方法を比較し，互除法の方が簡単に最大公約数を求めることができる理由を説明せよ。

(5)　互除法は自然数以外にも適用できる。二つの多項式$f(x)$と$g(x)$に上記の手続きを適用したとき，何を求めることができるか説明せよ。また，自然数，多項式以外にも適用できるものがあれば，その理由とともに説明せよ。

６　平成２６年度中国の国公立大学推薦入試問題から

山口大学　理学部　数理科学科　小論文（一部略）

問題１　高校生のＡ君と大学生のＢ君が会話をしています。次の会話文を読み，問1～問3に答えない。

Ａ君：「今日は，ベクトルの内積というのを学校で習ったんだ。」
Ｂ君：「そうなんだ。」
Ａ君：「平面上の$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{u}$と$\vec{v}$に対して，2つのベクトル$\vec{u}$と$\vec{v}$のなす角をθとしたとき，

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

とおいて，$\vec{u}$と$\vec{v}$の内積という。」
Ｂ君：「成分表示ができたよね。」
A君：「うん。平面上のベクトル$\vec{u}=(u_1,u_2)$，$\vec{v}=(v_1,v_2)$に対して，内積$\vec{u}\cdot\vec{v}$は$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$で計算できる。」
Ｂ君：「内積以外にも，これに似た　“計算規則” があるよ。」
A君：「えっ，どういうこと？」
Ｂ君：「平面上のベクトル$\vec{u}=(u_1,u_2)$，$\vec{v}=(v_1,v_2)$に対して，$\vec{u}\Diamond\vec{v}=u_1v_2-u_2v_1$と定義する。これは内積ではないが, どちらも２つのベクトルから実数を与える対応だ。」
A君：「内積と同様に，次のような性質が成り立つね。

(1)　$(c\vec{u})\Diamond\vec{v}=\vec{u}\Diamond(c\vec{v})=c(\vec{u}\Diamond\vec{v})$

(2)　$(\vec{u}+\vec{\omega})\Diamond\vec{v}=\vec{u}\Diamond\vec{v}+\vec{\omega}\Diamond\vec{v}$

ただし，$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{\omega}$は平面上のベクトルとし，cは実数とする。」

Ｂ君：「内積と違う性質を持っているよ。例えば$\vec{u}\Diamond\vec{v}=-\vec{v}\Diamond\vec{u}$となるね。」

問１　次の等式を示しなさい。$\vec{u}\Diamond\vec{v}=-\vec{v}\Diamond\vec{u}$

A君：「内積については，$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$であるのは，この２つのベクトル$\vec{u}$と$\vec{v}$が直交していることを意味していたよね。」
Ｂ君：「$\vec{u}\Diamond\vec{v}=0$となるのは，どのような場合かな？」

問２　$\vec{u}\Diamond\vec{v}=0$であるのは，どのような場合か，理由をつけて答えなさい。

A君：「ベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$に対して$\vec{u}\Diamond\vec{v}$というのは，何を表しているのだろう。」
Ｂ君：「図をかいてみたら。」

問３　ベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$がどちらも$\vec{0}$でないとする。この２つのベクトル$\vec{u}$と$\vec{v}$のなす角をθとしたとき，$\vec{u}\Diamond\vec{v}$を$|\vec{u}|$，$|\vec{v}|$，θを用いて表しなさい。

Ａ君：「これを見ると，関係式，

$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+(\vec{u}\Diamond\vec{v})^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ が成り立つね。」

問題３　$f(x)=e^x$ を多項式(整式)で近似することを考えよう。一般にxが０に近いとき，関数$f(x)$の近似式

$$f(x)\fallingdotseq a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$a_0=f(0),\ a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0) \quad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

が知られている。式①の右辺を$P_n(x)$と書くとき，次の問いに答えなさい。

問１　$P_1(x)$と$P_2(x)$を求めなさい。

問２　xが実数のとき，不等式$f(x)\geqq P_1(x)$を示しなさい。

問３　$P_1(x)$と$P_2(x)$のどちらが$f(x)$の良い近似式だと思いますか。３つの関数$y=f(x)$，$y=P_1(x)$，$y=P_2(x)$のグラフを比較しながら，理由をつけてあなたの考えを述べなさい。

島根大学　総合理工学部　数理・情報システム学科

小論文

問題１　直径１の円周上に異なる４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあり，線分ＡＣと線分ＢＤは垂直に交わっている。線分ＡＣと線分ＢＤの交点をＰとし，$\angle BAP=\alpha$，$\angle PAD=\beta$とするとき，次の問いに答えよ。ただし，加法定理以外の定理は自由に用いてよい。

⑴　ＢＣ＝$\sin\alpha$であることを証明せよ。

⑵　ＢＰ＝$\sin\alpha\cos\beta$であることを証明せよ。

⑶　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$であることを証明せよ。

問題２　関数$f(x)$が閉区間$[a,b]$で連続で，開区間(a,b)で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる点cが区間(a,b)内に少なくとも１つある。これを平均値の定理という。次の問いに答えよ。

⑴　$f(x)=x^3+2x^2+3x-1$を区間$[0,3]$で考えるとき，平均値の定理をみたすようなcを求めよ。

⑵　閉区間$[a,b]$で連続で，開区間(a,b)で微分可能な関数$f(x)$に対して，$f(x)$が閉区間$[a,b]$で定数であることの必要十分条件は，(a,b)でつねに$f'(x)=0$であることを証明せよ。

⑶　「関数$f(x)$が閉区間$[a,b]$で連続で，

１点p（$a<p<b$）を除く開区間(a,b)のすべての点で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる点$c\neq p$が区間(a,b)内に少なくとも１つある。」

という命題が正しくないことを示したい。関数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1(0\leq x\leq 1)\\ 2x-2(1\leq x\leq 2)\end{cases}$$

を調べることによって，上の命題が正しくないことを示せ。

問題３　$a>0$とし，関数$f(x)$を

$f(x)=ax-\log(x+1)$と定める。

このとき，次の問いに答えよ。

⑴　$f(x)$の定義域を求めよ。

⑵　$y=f(x)$のグラフの概形を描け。

⑶　kを実数とする。$f(x)=0$が成り立つときのaの値をkを用いて表せ。

⑷　$a=\log 2$のとき，曲線$y=f(x)$とx軸で囲まれる図形の面積Sを求めよ。

問題４　１からｎまでの自然数の和を

$a_n=1+2+3+\cdots+n$　とおく。また，$b_n=2n-1$をｎ番目の奇数と呼ぶことにする。このとき，次の問いに答えよ。

⑴　$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$であることを数学的帰納法により証明せよ。

⑵　１番目からｎ番目までの奇数の和を求めよ。

⑶　a_n+1番目からa_{n+1}番目までの奇数の和を求めよ。

⑷　⑴，⑵，⑶の結果を用いて$1^3+2^3+\cdots+n^3$を求めよ。

島根大学　総合理工学部　機械・電気電子工学科
小論文

曲線$f(x)=e^{ax}\cos 2\pi x$について，以下の設問に答えよ。ただし，eは自然対数の底，πは円周率，aは定数である。

⑴　この曲線とx軸との交点を点Ａ（$x_A,0$），点Ｂ（$x_B,0$）とする。x_Aとx_Bの値を求めよ。ただし，$0<x_A<x_B<1$とする。

⑵　点Ａでの接線l_1を求めよ。

⑶　点Ｂでの接線l_2を求めよ。

⑷　接線l_1と接線l_2の交点Ｃの座標を求めよ。

⑸　この曲線と線分ＡＢに囲まれた領域の面積S_1を求めよ。

⑹　この曲線と線分ＡＣ，ＢＣに囲まれた領域の面積S_2を求めよ。

7　まとめ

問題の一部を取り上げた。2015年度からは数学においては新課程となることもあり数Ｃの行列の問題は割愛した。広島大学　工学部　第二類(電気・電子・システム・情報系)では，ユークリッドの互除法が取り上げられていた。今後，新課程のなかで入試内容も変化していくと考えられる。全体的に難問はないものの全範囲を基礎・基本から応用まで幅広く問われている。ただし，１１月頃の受験で２次レベルの力が要求させるので，それまでに十分な学力を身につけておくことが求められる。また，公式を使って解くだけではなく，誘導して証明させて，様々な思考をさせる問題もあり工夫されている。（山口大理学部数理科学科のベクトルの高校生にとって新しい定義(外積)による応用問題や，島根大総合理工学部数理・情報システム学科平均値の定理の応用問題)

今回の研究から，ＡＯ入試や推薦入試の問題では，長い問題文を読み解く力に加え，自分の考えを論理的に相手に伝える表現力も必要であると感じた。日頃から数学を含め自然科学の分野に興味関心を持ち，自分なりに考え，相手に伝える活動を普段の授業の中で取り入れられるよう工夫していきたい。