大学入学共通テストに向けた問題の分析

愛媛県立新居浜西高等学校　松本　慎
愛媛県立松山西中等教育学校　壺内　智士
愛媛県立大洲高等学校　入田　圭司

1　はじめに

いよいよ今年度から大学入学共通テストが実施される。（この部会誌が出るころには第１回が終わっているはずである。）昨年度から研究部でもセンター試験の分析に代わり共通テストに向けた問題の分析を行うこととした。

2019年12月17日に記述式問題の導入の見送りが発表されたが、思考力・表現力・判断力を問う問題が出題されることは変わらないと思われる。昨年度の部会誌で、思考力・表現力・判断力の育成について掲載しているので、参考にしてもらいたい。新学習指導要領の各教科等の評価の観点及びその趣旨の中で、数学の思考・判断・表現の趣旨は、「数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を身に付けている。」としている。問題の作成にあたっても、そのような力を問うことを意識していると思われる。

2　問題例

昨年度と同様に、いくつかのタイプの問題を紹介する。

①　間違いを見つける問題

1　太郎さんが方程式を次のように解いた。

〈太郎さんのノート〉

$$\log_3(x-2)^2=2$$
$$\downarrow \quad \cdots(\mathrm{A})$$
$$2\log_3(x-2)=2$$
$$\downarrow \quad \cdots(\mathrm{B})$$
$$\log_3(x-2)=1$$
$$\downarrow \quad \cdots(\mathrm{C})$$
$$x-2=3$$
$$\downarrow \quad \cdots(\mathrm{D})$$
$$x=5$$

次の太郎さんと花子さんの会話を読んで，次の問いに答えなさい。

【会話】

太郎：今日の授業で答合わせをした時に，僕の答が違ってたんだけど，どこが違うかわからないんだ。

花子：$\boxed{\text{ア}}$ のところが違うわよ。真数は正でないといけないから。

太郎：そうか，この問題では，真数が正になるための x の範囲は $\boxed{\text{イ}}$ だけど，$\boxed{\text{ア}}$ としてしまうと，真数が正になるための x の範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ となってしまうんだ。

花子：そう。だから授業でやったように解かないといけないのよ。

太郎：真数が正になればいいなら，$\boxed{\text{エ}}$ としてもいいよね。そうすれば，$x=5$，$\boxed{\text{オカ}}$ が出てきたよ。

(1)　$\boxed{\text{ア}}$ について，式変形 (A)～(D) のうち，誤っている部分の記号を次の⓪～③のうちから１つ選びなさい。

⓪ (A)　① (B)　② (C)　③ (D)

(2)　$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ について，当てはまる式を次の⓪～③のうちから１つ選びなさい。

⓪ $x>0$　① $x>2$　② $x\fallingdotseq 2$　③ $x<2$

(3)　$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる式として最も適当なものを次の⓪～③のうちから１つ選びなさい。

⓪ $\sqrt{x-2}$　① $|x-2|$　② (x^2+4)　③ $(x\pm 2)$

(4)　$\boxed{\text{オカ}}$ に当てはまる数を答えよ。

対数の方程式で生徒が疑問に思うところを取り上げてみた。対数の性質では，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$，$M>0$ で，k が実数のとき $\log_a M^k = k\log_a M$ となっていて，変形自体はよく使うが，文字の条件をあまり気にしない生徒が多いと感じる。特に，指数関数と対数関数では文字の条件を調べる場面が多いので，丁寧に指導していきたい。授業では，$(x-2)^2=3^2$ と変形して解くのが一般的だと考え，$|x-2|=3$ とする別解をイメージして設問を作った。

②　複数の解答法を検討する問題

(1)　数学Ｂ「数列」

1　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=8$，$a_{n+1}=2a_n-3n+1\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ ……①を満たすとする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてみよう。

【考え方１】

数列 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)-\beta\}=2\{a_n-(\alpha n-\beta)\}$ の形に変形できるように，実数 α，β を求める。

$\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\beta=\boxed{\text{イ}}$ に対して，$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ が公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列になることを用いる。

【考え方２】

階差数列をとって考える。

$a_{n+2}=\boxed{\text{エ}}a_n-\boxed{\text{オ}}n-\boxed{\text{カ}}$ ……②であるから，②−① より

$a_{n+2}-a_{n+1}=\boxed{\text{エ}}(a_{n+1}-a_n)-\boxed{\text{キ}}$

となる。$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ が公比 $\boxed{\text{ク}}$ の等比数列になることを用いる。

いずれの考え方を用いても，一般項を求めることができ，

$$a_n=\boxed{\text{ケ}}\cdot\boxed{\text{コ}}^{\boxed{\text{サ}}}+\boxed{\text{シ}}n+\boxed{\text{ス}}\quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

である。

ただし，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～④ に当てはまるものを一つ選びなさい。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

平成29年度の試行調査では，得られた漸化式に対して２通りの解法を考えることにより，一般項を求めさせる問題が出題されていたので、それを基に作成した。今回は漸化式から一般項を求める問題のみを掲載したが，実際は与えられた条件から漸化式を立てることも重要になると思う。

(2)　数学Ⅱ「いろいろな式」

2　太郎さんと花子さんは次の問題に取り組むことにした。

> **問題**　$a>0$ のとき　$\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\left(4a+\dfrac{1}{a}\right)$ の最小値を求めなさい。

この問題について，太郎さんと花子さんは次のように解答した。

【太郎さんの解答】

$a>\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{4}{a}>\boxed{\text{ア}}$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=\boxed{\text{イ}}$$

また，$4a>\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{1}{a}>\boxed{\text{ア}}$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$4a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{4a\cdot\frac{1}{a}}=\boxed{\text{ウ}}$$

①，②より　$\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\left(4a+\dfrac{1}{a}\right)\geqq\boxed{\text{イ}}\times\boxed{\text{ウ}}$

よって，求める最小値は　$\boxed{\text{イ}}\times\boxed{\text{ウ}}$

【花子さんの解答】

$\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\left(4a+\dfrac{1}{a}\right)$ を整理すると

$$\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(4a+\frac{1}{a}\right)=\boxed{\text{エ}}a^2+\frac{\boxed{\text{オ}}}{a^2}+\boxed{\text{カキ}}$$

$\boxed{\text{エ}}a^2>\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{a^2}>\boxed{\text{ア}}$ あるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\boxed{\text{エ}}a^2+\frac{\boxed{\text{オ}}}{a^2}\geqq 2\sqrt{\boxed{\text{エ}}a^2+\frac{\boxed{\text{オ}}}{a^2}}=\boxed{\text{ク}}$$

これより

$$\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(4a+\frac{1}{a}\right)\geqq\boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{カキ}}$$

よって，求める最小値は　$\boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{カキ}}$

(1)　$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数を求めなさい。

(2)　太郎さんと花子さんの解答のうち，一方の最小値は間違っている。$\boxed{\text{ケ}}$ が求めた最小値が間違っていて，その理由は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまる最も適切なものを，次の選択肢から選んで答えなさい。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答

⓪　太郎さん　①　花子さん

$\boxed{\text{コ}}$ の解答

⓪　$a\geqq b>0$ かつ $c\geqq d>0$ ならば $ac\geqq bd$ は成り立たないから

①　$a=\dfrac{4}{a}$，$4a=\dfrac{1}{a}$ を同時に満たす a が存在しないから

②　$\boxed{\text{エ}}a^2=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{a^2}$ を満たす a が存在しないから

平成29年度の試行調査で相加平均と相乗平均の関係を利用し、式の最小値を求める問題において，解決過程における誤りの理由を考察する問題が出題された。

昨年度の研究で数学Ⅰ「図形と計量」における角の二等分線の長さを求める問題でも取り上げたが、単純に解を求めるという今までの形式ではなく、解を求める過程や理由も考えることが必要になると思う。

また、「①　間違いを見つける問題」とも関連しており、複数の解答法を検討する中で数学的な見方や考え方を働かせることにより、的確かつ能率的に処理したり、批判的に検討したりする力が問われると考えている。

(3)　数学Ｂ「ベクトル」

3　太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で次のような問題が出された。

> **問題**　△OABにおいて，辺OAを $2:1$ に内分する点をC，辺OBを $3:2$ に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

太郎さんと花子さんは出題された問題について，各自で解いてみた。解き終わった後，二人はこの問題について，次のような会話をした。

【会話】

太郎：僕は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の表し方は1通りしかないことを用いて解いてみたよ。

【太郎さんの解法】

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots①$$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots②$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，①，②より

$$1-s=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t,\quad \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}s=1-t$$

これを解くと　$s=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{b}$

花子：私は直線のベクトル方程式を応用して解いてみたわ。

【花子さんの解法】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおく。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

点Pは直線AD上にあるので　$x+\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}y=\boxed{\text{ソ}}\cdots\cdots③$

$\vec{a}=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}x\overrightarrow{\mathrm{OC}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

点Pは直線BC上にあるので　$\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}x+y=\boxed{\text{ソ}}\cdots\cdots④$

③，④を解くと　$x=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{b}$

太郎：別の解き方だけど，二人とも同じ答になったね。

花子：他にも違う解き方はないかな。

太郎：OC : CA と OD : DB が分かっているから，$\boxed{\text{ツ}}$ と内分点の位置ベクトルの公式を使っても解けるかもしれないね。

(1)　$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまる数を求めなさい。

(2)　$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまる最も適切な公式を，次の ⓪～③ から一つ選んで答えなさい。

⓪　正弦定理　①　余弦定理

②　メネラウスの定理　③　方べきの定理

解法が３通りあることはよく知られている問題だと思うので取り上げてみた。３つ目の解法は数学Ａの「図形の性質」で学習するメネラウスの定理を用いるものである。平成26年度のセンター試験において数学的帰納法の問題が出題されたが、その証明法を選ぶ際、数学Ⅰの「背理法」が選択肢の中にあった。このことから「数学Ⅱ・数学Ｂ」の問題であっても「数学Ⅰ・数学Ａ」の内容も当然出題されるので、科目にこだわる必要はないと思われる。

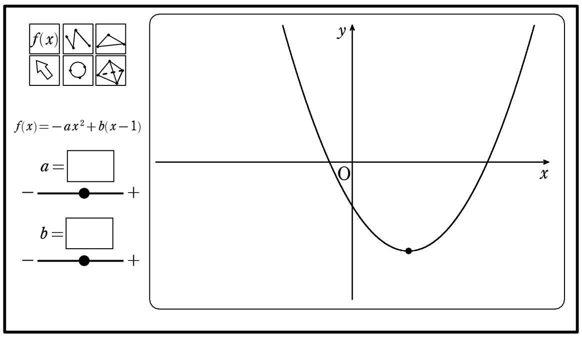
しかし、センター試験と同様に共通テストにおいても、数学Ａは「場合の数と確率」、「整数の性質」、「図形の性質」の３単元から２単元の選択履修で対応できるため、「図形の性質」を選択していない生徒のことを考えると、この(2)のような問題が出題される可能性は極めて低いと思う。

③　コンピュータを用いた問題

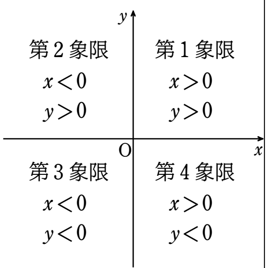
$\boxed{1}$　数学の授業で，関数 $f(x)=-ax^2+b(x-1)$ について，コンピュータのグラフ表示ソフトを用いて考察している。このソフトでは，【図１】のような画面上で a , b の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される仕組みになっている。また，それぞれの $\boxed{}$ の下にある ● を左に動かすと値が減少し，右に動かすと値が増加するようになっており，値の変化に応じて関数のグラフが画面上で変化する仕組みになっている。

最初に a , b をある値に定めたところ，【図１】のような放物線が表示された。

【図１】



また，座標平面は x 軸， y 軸によって四つの部分に分けられる。これらの各部分を「象限」といい，右の図のように，それぞれを「第１象限」「第２象限」「第３象限」「第４象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。



(1)　【図１】の画面のような頂点が第４象限にあるグラフが表示されたとき， a , b の符号の組み合わせとして適当なものを右の ア～エ から<u>一つ選び</u>記号で答えよ。

	a	b
ア	＋	−
イ	＋	＋
ウ	−	＋
エ	−	−

(2)　【図１】の画面のようなグラフが表示されたとき，方程式 $f(x)=0$ の解について正しく記述したものを次のア～オの中から<u>一つ選び</u>，記号で答えよ。

ア　方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの正の解をもつ。
イ　方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの負の解をもつ。
ウ　方程式 $f(x)=0$ は正の解と負の解をもつ。
エ　方程式 $f(x)=0$ は重解をもつ。
オ　方程式 $f(x)=0$ は実数解をもたない。

(3)　【図１】の画面を初期画面とし， a の値は変化させずに b の値だけを大きくした。このとき表示されるグラフの頂点について正しく述べたものを，次のア～オの中から<u>すべて選び</u>，記号で答えよ。

ア　原点となることがある。
イ　原点を除く x 軸上の点となることがある。
ウ　原点を除く y 軸上の点となることがある。
エ　第１象限上の点となることがある。
オ　第２象限上の点となることがある。
カ　第３象限上の点となることがある。
キ　第４象限上の点となることがある。

(4)　b の値を $b=2$ のまま変えずに， a の値だけを変化させた。このとき，方程式 $f(x)=0$ の解がただ一つになるような a の値を求めよ。

$\boxed{2}$　ある日の授業で，先生から次のような問題が出題された。

$a>0$ とし，$f(x)=ax^2+bx+c$ とする。命題「２次方程式 $f(x)=0$ が異なる２つの負の数の解をもつ」…(*)　が真であるための $f(x)$ の条件を考えなさい。

次の会話は，授業中のグループワーク中に２人で話をしている場面である。２人の会話を読んで，次の問いに答えよ。

加奈：２次方程式 $f(x)=0$ が異なる２つの解をもつということだから，まず

〔１〕　２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D として， $\boxed{\text{ア}}$

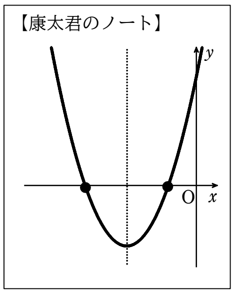
という条件が必要だね。

康太：そのようだね。でも，今回の問題では異なる２つの<u>負の数の</u>解というところがポイントなんだよね。

加奈：そういえば２次方程式 $f(x)=0$ の解は，放物線 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標に注目すればよかったんだよね。

康太：そうだ！条件に適する図を書いてみよう。（下図）

【康太君のノート】



加奈：なるほど，こうして実際に図を書いてみると，必要な条件が見えてくるね。〔１〕に加えて，

〔２〕　放物線 $y=f(x)$ の軸が y 軸の左側にある

という条件が必要そうだね。

康太：とりあえず２つ条件を考えたけれど，本当に〔１〕と〔２〕の２つで命題(*)が真になるといえるんだろうか。

加奈：ちょっと待って！〔１〕と〔２〕の２つの条件を満たすいろいろな図を書いてみたんだけど，(イ)<u>命題(*)に対するこんな反例</u>が存在しそうだよ。

康太：本当だね。ということは，〔１〕と〔２〕に加えて

〔３〕　$\boxed{\qquad\text{ウ}\qquad}$

の条件が必要そうだね。

加奈：これでできた気がする！

あっ、先生！私たちのグループできました！見てください！

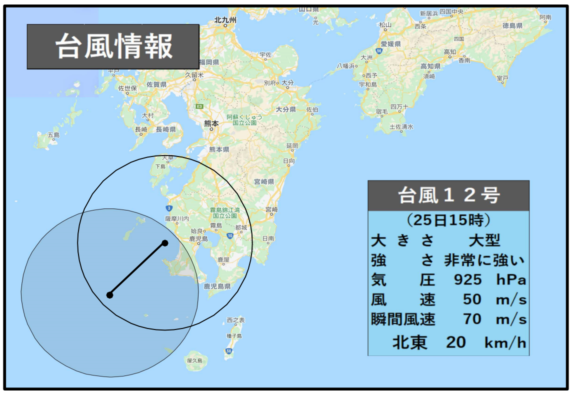
(1)　$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次のア～オの中から一つ選び，<u>記号で答えよ。</u>

ア　$D>0$　　イ　$D\geqq 0$　　ウ　$D=0$
エ　$D<0$　　オ　$D\leqq 0$

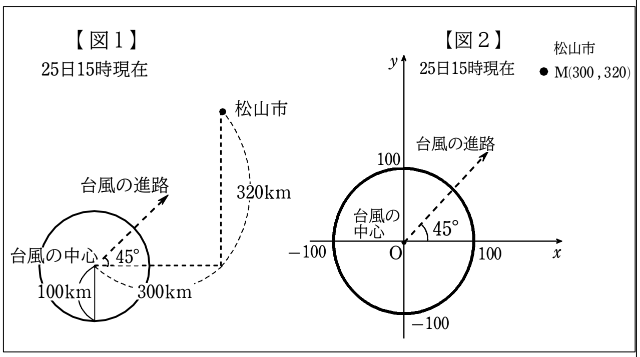
(2)　波線部(イ)について，その反例を表す放物線 $y=f(x)$ の１つを【康太君のノート】を参考にして図示せよ。ただし，放物線の軸を破線（点線）で明記すること。

(3)　$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる条件を答えよ。ただし， a , b , c のうち必要なものを用いてもよい。また，文章で表しても，数式で表してもよい。

$\boxed{3}$　次の会話は，愛媛県松山市に住む加奈さんと康太くんがニュースを見ながら話している場面である。



加奈：台風が近づいてきているね。暴風警報も出ているし…。
康太：そうだね。さっき見たニュースによると，25 日の 15 時現在で台風の中心は松山市の西 300km，南 320km にあって，時速 20km で北東に進んでいるそうだよ。
加奈：中心から半径 100km 以内が風速 25m/s 以上の暴風域になっているとも言ってたね。
康太：このままいくと，何時何分ごろに暴風域に入るんだろうね。
加奈：そうだなぁ…。台風を xy 座標平面において考えてみると計算で求めることができるかも。



25 日 15 時現在で時速 20km で北東方向に進む【図１】の台風を，【図２】のように xy 座標平面において考える。また，暴風域の境界を表す円を C とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，指示がない限り台風の進路や規模は変化しないものとし，
$\sqrt{2}=1.4$，$\sqrt{3}=1.7$ とする。

(1)　25 日 15 時現在と 25 日 19 時時点での円 C を表す方程式を求めよ。
(2)　松山市が暴風域に入るのは何日の何時何分か求めよ。
(3)　台風が進路を北東から 15° 東よりに変えた場合，松山市は暴風域に入らなかった。この理由を数式を用いて説明せよ。ただし，**点と直線の距離**という言葉を使用すること。

高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）の数学編第 2 章第 1 節には、「二次関数の値の変化やグラフの特徴を理解するとともに，二次関数の式とグラフとの関係について，コンピュータなどの情報機器を用いてグラフを書くなどして多面的に考察すること」と書かれており，試行調査第 1 回・第 2 回ともにコンピュータのグラフ表示ソフトを用いる設定で出題されている。

今回第 1 問・第 2 問においてもグラフ表示ソフトを用いて，頂点に着目してグラフの位置関係を調べたり，二次方程式の解と二次関数のグラフの関係について考察させる問題を出題した。また，関数 $y=ax^2+bx+c$ において a が 0 のときにグラフが直線になることに着目させる問題も出題し，総合的な力を確認する問題とした。

高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）の数学編第 2 章第 2 節には、「数量と図形との関係などに着目し，日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え」ることと書かれている。日常の事象において数学的に捉える際には計算が煩雑になることが多い。大学によっては個別学力検査においても新傾向の問題を出題する方針の学校もあり，文章量・計算量ともに増加する可能性がある。

第 3 問においては今回の第 3 問においては台風をテーマに思考力を問う問題を作成した。計算量が多く，(2) では時間の処理も求められるため非常に解きにくいと考えられる。

3　終わりに

最近は共通テスト対策の問題集も充実しているため、共通テストに向けての演習や対策はできていると思う。しかし、共通テストの過去問は当然ないため、どのような問題が出題されるか、今まで取り組んできたことがどのくらい役に立つかという点で不安が残るのが本音である。

今年度出題される問題を細かく分析することで，来年度以降も研究をしっかり行っていきたいと思っている。

4　参考文献

・大学入学共通テスト　平成29年度試行調査
（独立行政法人大学入試センター）
・大学入学共通テスト　平成30年度試行調査
（独立行政法人大学入試センター）
・チャート式　大学入学共通テスト対策　数学ⅠＡ＋ⅡＢ
（数研出版）