平成 26 年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校　近藤　弘法

1　はじめに

５月 17 日（土）に松山南高等学校において，愛媛大学理学部　土屋　卓也　教授より平成 26 年度愛媛大学数学入試問題の解説があった。では，どこでどのような間違いが生じてくるのか，本校生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

2　出題の傾向

（１）出題傾向

今年度は教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースにおいて記述４題を 100 分で，理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く），医学部医学科においては記述５題を 120 分で，工学部後期は記述５題を 120 分で解答する。

（２）出題内容

教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコース

1　小問集合
2　微分法・積分法
3　整数の性質
4　確率

理学部，工学部

4　確率
5　小問集合
6　２次方程式
7　微分法・積分法
8　行列

医学部医学科

4　確率
6　２次方程式
7　微分法・積分法
8　行列
9　確率

工学部後期

1　小問集合
2　小問集合
3　命題
4　微分法・積分法
5　ベクトル

（３）難易度

今年度は昨年度に比べ，全体的に難易度が上がったように感じた生徒が多かった。前期試験では整数に関する問題，後期試験では命題の証明問題が与えられるなど，論理的な思考力を必要とされるものが含まれていた。証明問題に不慣れな生徒は，論理的に説明することができず，内容が伝わらない解答となっていた。難易度としては基本～標準レベルの問題を中心に出題されている。小問については例年通り教科書レベルの基本問題であり，確実に完答したいところである。工学部後期については，一昨年は全問記述式の問題であったが，今年度は穴埋め式の問題が$\boxed{1}$で出題されていた。確実な知識と計算力を見るためであると考えられる。

3　問題分析

本校の３年生に入試問題を解いてもらう。
３年生の文型の生徒に１～４，理型生徒に４～１０，理数科生徒に工学部後期１～５を解いてもらった。採点基準は公表されていないため，定期考査に準じて採点し，得点率と誤答例から分析を行った。

＜前期＞

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ。

(1)　AB=1，∠A=90°を満たす直角二等辺三角形 ABC において，辺ABの中点を P，辺ACを 2 : 1 に内分する点を Q，線分 CP と線分 BQ の交点をRとする。このとき，線分 AR の長さを求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，必要ならば $\log_{10}3=0.4771$ として計算せよ。

(3)　k を実数とし，不等式

$$x^2-2x-3>0\text{，}\ x^2-(k+1)x+k>0$$

を満たす実数 x の集合をそれぞれ A，B とする。このとき，$A\subset B$ であるための必要十分条件を k を用いて表せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	75.3	66.5	36.6	58.5
標準偏差	2.8	3.3	2.0	4.9

【誤答例】

(1)　AR⊥BQとして問題を解いている。

$\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表したときの一次独立性を利用しているが，連立方程式の計算が間違っている。

(2)　常用対数のとり方がわかっていない。

$10^{-13}<3^{-26}<10^{-12}$ まではできているが，小数第12位と答えている。

(3)　$x^2-2x-3>0$ が間違っている。

$x^2-(k+1)x+k>0$ について，$k=1$ のときが考えられていない。

十分条件のみの証明になっている。

2　t，x は実数とする。関数 $f(t)$ を

$$f(t)=2|t-1|+t+1$$

と定義し，　$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とおく。

(1)　関数 $y=f(t)$ のグラフをかけ。

(2)　関数 $F(x)$ を求めよ。

(3)　曲線 $y=F(x)$ 上の点 $(0\ ,\ F(0))$ における接線 l の方程式を求めよ。

(4)　曲線 $y=F(x)$ と(3)で求めた接線 l とで囲まれた図形の面積を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	91.3	26.1	39.0	1.3	37.9
標準偏差	1.0	1.6	2.6	0.4	4.2

【誤答例】

(1)　場合分けしているが直線がすべて実線でかかれている。

(2)　場合分けができていない。

$x\geqq1$ のとき $F(x)=\int_0^x(3t-1)dt$ として計算している。

(3)　$x\geqq1$ の $F(x)$ についても点 $(0\ ,\ F(0))$ における接線を求めている。

(4)　(2)ができていない。

3　A は3桁の自然数で，その百の位の数 x，十の位の数 y，一の位の数 z は，

$$100x+10y+z=x!+y!+z!$$

を満たしている。

(1)　6! の値を求め，x，y，z はすべて5以下であることを示せ。

(2)　x は3以下であることを示せ。

(3)　y，z のうち少なくとも1つは5であることを示せ。

(4)　A を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	53.7	12.3	11.4	7.5	24.0
標準偏差	2.0	1.6	1.6	1.6	5.5

【誤答例】

(1)　証明の道筋が立っていない。

$x=y=z=6$ の場合のみ考えている。

7以上で成り立たない証明が記述されていない。

(2)　証明の道筋が立っていない。

等式が成り立ちそうな値を推測して，考えている。

(3)　証明の道筋が立っていない。

ある値のときのみを検証している。

(4)　(1)から(3)までの条件を利用して，すべてを書き出している。

4　n を0以上の整数とする。点P，Qは1辺の長さが1である正四面体ABCDの頂点の上を，以下の条件(a)，(b)を満たしながら移動する。

(a)　時刻 $t=0$ において，点Pは頂点Aに，点Qは頂点Bにいる。

(b)　時刻 $t=n+1$ において，点Pと点Qは各々，時刻 $t=n$ のときにいた頂点から，他の3つの頂点のいずれかに，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。

時刻 $t=n$ における点Pと点Qの間の距離を d_n とおく。d_n の値は0または1である。時刻 $t=n$ において $d_n=1$ となる確率を P_n とする。

(1)　時刻 $t=1$ とする。

（i）　点Pが頂点Cにいるとき，$d_1=1$ となる点Qの位置は何通りか。

（ii）　点Pが頂点Bにいるとき，$d_1=1$ となる点Qの位置は何通りか。

(2)　P_1 を求めよ。

(3)　$d_1+d_2=1$ となる確率を求めよ。

(4)　P_{n+1} を P_n で表し，p_n を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
文型得点率	77.3	62.3	17.3	2.3	34.1
文型標準偏差	1.6	3.3	1.8	1.4	5.8
理型得点率	96.2	82.1	55.9	7.7	52.3
理型標準偏差	0.5	2.7	2.3	2.4	5.8

【誤答例】

(1)　図形が立体として考えられていない。

(2)　点Pが点Dにいるときが考えられていない。
　　点Pが 点Bにいるときしか考えられていない。

(3)　$d_1=1$ かつ $d_2=0$ ，$d_1=0$ かつ $d_2=1$ のいずれか，もしくは両方の確率が求まっていない。

(4)　$P_{n+1}=\dfrac{7}{9}P_n$ としている。

$\boxed{5}$　次の問いに答えよ。（医学部希望者は除く）

(1)　すべての実数 x に対して

$$f(x)=\sin\pi x+\int_0^1 tf(t)dt$$

が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$$

(3)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

(4)　関数 $f(x)=|x|(e^x+a)$ は $x=0$ において微分可能であるとする。このとき，定数 a の値を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	75.1	44.0	31.2	0.0	39.1
標準偏差	2.3	2.9	2.8	0.0	5.6

【誤答例】

(1)　方程式 $a=\int_0^1 t(\sin\pi t+a)dt$ が解けていない。

(2)　処理できていない。
　　$\cos 0=0$ としている。

(3)　区分求積が理解できていない。

(4)　$x\geqq 0$ のときの関数 $f(x)=x(e^x+a)$ を微分して $x=0$ を代入している。

$\boxed{6}$　n は自然数，m は整数，k ，α ，β は実数とする。

(1)　$\alpha\geqq 1$ ，$\beta\geqq 1$ のとき，$\alpha\beta\geqq\alpha+\beta-1$ が成り立つことを示せ。

(2)　x に関する2次方程式 $x^2-mx+k=0$ の2つの解を p，q とする。p が整数ならば，q と k も整数であることを示せ。

(3)　x に関する2次方程式 $x^2-n^2x+n=0$ は，整数の解をもたないことを示せ。

(4)　x に関する2次方程式 $x^2-(n-2)^2x+n=0$ が整数の解をもつとき，n の値とその解をすべて求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	82.1	87.2	8.4	4.0	34.4
標準偏差	1.6	1.6	1.3	1.5	3.9

【誤答例】

(1)　証明の筋道が立っていない。
　　結論を変形しているだけであるため，証明になっていない。

(2)　証明の筋道が立っていない。

(3)　証明の筋道が立っていない。
　　n^4-4n が平方数にならないことを利用しようとしているが，そのことが証明できていない。

(4)　判別式を利用しようとしている。
　　n の範囲は求められている。

$\boxed{7}$　a，b は，$0<b<a$ を満たす実数とする。曲線 $y=e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線 l_1 の方程式を $y=f(x)$，点 $(a,\ e^a)$ における接線 l_2 の方程式を $y=g(x)$ とおく。また，l_1 と l_2 の交点の x 座標を $P(a)$ とする。連立不等式

$$0\leqq x\leqq b,\quad f(x)\leqq y\leqq e^x$$

の表す領域の面積を S_1，連立不等式

$$b\leqq x\leqq a,\quad g(x)\leqq y\leqq e^x$$

の表す領域の面積を S_2 とし，$R=e^{-b}S_2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。必要ならば，すべての自然数 k に対して，$\lim\limits_{x\to\infty}x^ke^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$p(a)$ を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 を求めよ。

(3)　$t=a-b$ とする。R を t のみの関数として表せ。

(4)　極限値 $\lim\limits_{a\to\infty}(a-p(a))$ を求めよ。

(5)　$b=p(a)$ とする。このとき，極限値 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	合計
得点率	86.2	57.9	18.5	20.5	0.0	35.8
標準偏差	1.3	1.9	1.9	1.6	0.0	4.7

【誤答例】

(1)　接線の方程式までは求められている。

(2)　$e^0=0$ として計算している。
　　不定積分が間違っている。

(3)　正しく処理できていない。

(4)　$a-p(a)$ は計算できている。

(5)　(2)ができていない。

$\boxed{8}$　$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とし，t は実数とする。
A は $A^3=E$ を満たす2次の正方行列とする。

(1)　$(A-tE)(A^2+tA+t^2E)$ を t と E を用いて表せ。

(2)　$t\fallingdotseq 1$ のとき $A-tE$ は逆行列をもつことを示せ。

(3)　次の3つの命題を証明せよ。

(ⅰ)　$A=E$ ならば，$A^2+A+E\fallingdotseq O$ である。

(ⅱ)　$A^2+A+E\fallingdotseq O$ ならば，$A-E$ は逆行列をもたない。

(ⅲ)　$A=E$ が逆行列をもたないならば，$A=E$ である。

$\boxed{9}$　（医学部希望者専用）
　n は自然数，p_0，p_1，…，p_n は $p_0>0$，$p_1>0$，…，$p_n>0$ かつ $p_0+p_1+\cdots+p_n=1$ を満たす定数とする。ポイント 0，1，2，…，$n-1$，n が，それぞれ p_0，p_1，p_2，…，p_{n-1}，p_n の確率で得られる試行 T を考える。試行 T を1回行って得られるポイントの期待値を a とし，$A=[a]+1$ とする。ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。
　競技者は，試行 T を下記の各設問のルールに従って何回か行う。

(1)　k を $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする。競技者は試行 T を以下のルールに従って最大2回まで行う。

①　試行 T を1回行い，もしポイントが k 以上であれば2回目の試行を行わず，このポイントを賞金とする。

②　1回目のポイントが k 未満であれば2回目の試行 T を行う。このとき，1回目のポイントは無効とし，2回目のポイントを賞金とする。
このとき賞金の期待値を b_k とする。b_k を求めよ。

(2)　(1)の期待値 b_k は k が A のとき最大となることを示せ。

(3)　m を $1\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。競技者は，試行 T を以下のルールに従って最大3回まで行う。

①　試行 T を1回行い，もしポイントが m 以上であれば2回目以降の試行を行わず，このポイントを賞金とする。

②　1回目のポイントが m 未満であれば2回目の試行 T を行う。2回目のポイントが A 以上であれば3回目の試行を行わない。このとき，1回目のポイントは無効とし，2回目のポイントを賞金とする。

③　2回目のポイントが A 未満であれば3回目の試行 T を行う。このとき，1回目，2回目のポイントは無効とし，3回目のポイントを賞金とする。
このときの賞金の期待値を c_m とする。c_m を求めよ。

(4)　(3)の期待値 c_m は m が $B=[b_A]+1$ のとき最大となり，$c_B \geqq b_A$ であることを示せ。ただし，b_A は(1)で求めた期待値 b_k の $k=A$ のときの値である。

(5)　$n=5$ とし，試行 T として，5枚の硬貨を同時に投げ，表の出た枚数をポイントとする試行を考える。また，b_k，c_m は上記で定義したものとする。

（ｉ）　p_0，p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，a を求めよ。

（ⅱ）　(1)のように最大2回試行を行う場合，b_k の最大値を求めよ。

（ⅲ）　(3)のように最大3回試行を行う場合，c_m の最大値を求めよ。

＜工学部後期＞

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ に入る数または不等式を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx=\boxed{\text{ア}}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx=\boxed{\text{イ}}$

(3)　行列 $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とし，点P(3，2)，点Q(2，1)の f による像は，ともに2点P，Qを通る直線上にあるとする。このとき，$a=\boxed{\text{ウ}}$，$b=\boxed{\text{エ}}$ である。

(4)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式

$$2\sin 2x-2\sqrt{2}\sin x-2\cos x+\sqrt{2} \geqq 0$$

の解は，$\boxed{\text{オ}}$ または $\boxed{\text{カ}}$ である。

問題番号	(ア)	(イ)	(オ)	(カ)	合計
得点率	35.1	16.2	42.7	31.9	31.5
標準偏差	2.4	1.8	2.4	2.3	6.8

【誤答例】

(ア)　部分積分が理解できていない。

(イ)　$\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx=-\log|1+e^{-x}|$ として計算している。

(オ)　等号が付いていない。

(カ)　等号が付いていない。

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ。

(1)　m，n を整数とする。$m-n$ を3で割った余りが k のとき，m^3-n^3 を3で割った余りも k であることを示せ。

(2)　$f(x)=e^x\sin x$ とする。$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフをかけ。

問題番号	(1)	(2)	合計
得点率	45.4	64.3	54.9
標準偏差	4.0	4.2	6.9

【誤答例】

(1)　証明の道筋が立っていない。
　　$k=0$ のときが考えられていない。

(2)　$f'(x)$，$f''(x)$ が求められていない。
　　$f'(x)$，$f''(x)$ の正負が間違っている。
　　極値，変曲点が記されていない。

$\boxed{3}$　n を自然数，θ を実数とし，

$$f_n(\theta)=(-1)^{n-1}\sin((2n-1)\theta)$$

とおく。命題

「関数 $f_n(\theta)$ は，係数の和が1となるようなある $(2n-1)$ 次式 $Q_n(x)$ を用いて $f_n(\theta)=Q_n(\sin\theta)$ と表すことができる」

を考え，この命題を p_n とする。

(1)　$R(x)$ を整式とする。このとき，$R(1)=1$ であることは，$R(x)$ の係数の和が1であるための必要十分条件であることを示せ。

(2)　命題 p_1 と p_2 はともに真であることを示せ。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，$f_{n+1}(\theta)+f_{n-1}(\theta)$ を $f_n(\theta)$ と $\sin\theta$ を用いて表せ。

(4)　ある自然数 n について命題 p_n と p_{n+1} が真ならば，p_{n+2} もまた真であることを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	22.2	17.1	0.0	0.0	10.7
標準偏差	1.9	1.7	0.0	0.0	3.4

【誤答例】

(1)　証明の道筋が立っていない。
　　十分条件のみの証明になっている。
　　$R(x)$ を1次式として考えている。

(2)　$Q_1(x)$，$Q_2(x)$ が正しく与えられていない。

$\boxed{4}$ xを$0 \leqq x < 1$を満たす実数とする。

(1) 積分$\displaystyle\int_0^x \frac{t^4}{1-t^2}dt$を計算せよ。

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^x \frac{t^4}{1-t^2}dt \leqq \frac{x^5}{5(1-x^2)}$$

(3) (1)，(2)を用いて，$\log 2$ の値を小数第2位まで求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	13.5	2.2	0.0	5.3
標準偏差	1.4	0.4	0.0	1.7

【誤答例】

(1) 部分分数を利用できていない。

$\displaystyle\int \frac{1}{t^2-1}dt = \log|t^2-1|$ としている。

$t = \sin\theta$ とおいて，置換積分を利用している。

$0 \leqq x \leqq 1$ であることが理解できておらず，$\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ で終わっている。

(2) 差を計算して示そうとしている。

$\displaystyle\int_0^x \frac{t^4}{1-t^2}dt \geqq 0$ のみ示している。

$\boxed{5}$ 1辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とする。s，tを$0<s<1$，$0<t<1$とし，辺OCを$(1-t):t$に内分する点をP，辺ABを$s:(1-s)$に内分する点をQ，点Pから平面OABに下ろした垂線と平面OABとの交点をRとし，$\theta = \angle\mathrm{PQR}$とおく。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$を，$s$，$t$および$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(3) $\sin\theta$ をs，tを用いて表せ。

(4) $s=3t$とする。このとき，$0<t<\dfrac{1}{3}$ の範囲でθを最大とするtの値を求めよ。また，そのときのθは$\dfrac{\pi}{3}$より大きいことを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	94.6	48.9	5.9	0.0	24.7
標準偏差	0.5	1.8	1.2	0.0	2.7

【誤答例】

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$が正しく求められていない。

垂直条件は理解しているが，計算できていない。

(3) (2)ができていない。

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$は計算できているが，$\sin\theta$ が表せていない。

4 おわりに

前期日程，後期日程ともに難化傾向であったように感じた。証明問題が多く出題されていることから，論理的思考力や表現力を重視した内容であった。前期の$\boxed{1}$，後期の$\boxed{3}$では必要十分条件であることの証明問題が出題されていたが，どちらも一方のみの証明が目立った。また，前期の$\boxed{3}$，$\boxed{6}$では整数の性質を用いた証明問題も出題されており，テクニックだけでは太刀打ちできない思考力を要する問題に手も足も出なかった生徒も多かった。解答の内容が相手に正しく伝わるような表現力を身に付けさせる必要があると改めて感じさせられた。さらに，前期の$\boxed{5}$(4)は微分の定義があやふやになっている生徒や問題で聞かれていることの意味を理解できていない生徒ばかりであった。問題が解けるという結果だけでなく，その成り立ちや結論が出るまでのプロセスをもっと大事にするべきである。

説明会において，土屋教授から採点時のポイントを話していただいた。「解答のプロセスを大事にしており，答えだけというものに対してはほとんど点を与えていない。解答のプロセスが論理的に書かれているかというような表現力，国語力を重視している。解答はきれいな字で丁寧に書いてもらいたい。」とのことであった。

今年度入試で論理的な思考力や表現力を重視した問題が多く出題されたことは，来年度以降の受験生に対するメッセージであると感じている。論理的に考え，さらにその自分の考えをはっきりと正しく表現できる力を育成することが今後の課題であると感じた。