国公立大学入試問題の研究

―整数問題について―

愛媛県立宇和島南中等教育学校　川野　星子

１　はじめに

平成２１年度の新学習指導要領から，数学Ａの単元の一つとして，「整数の性質」が登場した。整数問題に関する入試問題は，難関大学を中心に出題されており，どのような問題が出題されているのかを調べてみた。

２　学習指導要領より

まず，入試問題の前に整数の問題に関して学習指導要領での扱いについて調べた。

(1)　各ステージにおける目標

	目　　標
小学校	算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。
中学校	数学的活動を通して，数量や図形に関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。
高等学校	数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

(2)　各ステージにおける学習内容
　（小中は整数に関するもののみ）

小　学　校　　（　数　と　計　算　）	
第１学年	・整数の意味と表し方（２位数，簡単な３位数など） ・整数の加・減（１位数の加・減，簡単な２位数の加・減）
第２学年	・整数などの表し方（３位数，４位数，１万，簡単な分数など） ・整数の加・減（２位数の加・減，簡単な３位数の加・減など） ・整数の乗法（乗法九九，簡単な２位数の乗法など）
第３学年	・整数の表し方（万の単位，１億など） ・整数の加・減（３位数や４位数の加・減など） ・整数の乗法（２位数や３位数の乗法など） ・整数の除法（１位数による簡単な除法など） ・小数（小数の意味と表し方，小数の加・減） ・分数（分数の意味と表し方，簡単な分数の加・減） ・そろばん（数の表し方と加・減）
第４学年	・整数の表し方（億・兆の単位など） ・およその数（概数，四捨五入，四則計算の結果の見積り） ・整数の除法（２位数などによる除法など） ・整数の四則計算の定着と活用 ・小数の計算（小数の加・減，小数の乗・除） ・分数の計算（同分母分数の加・減など） ・そろばん（加・減）
第５学年	・整数の性質（偶数と奇数，約数と倍数，素数） ・整数と小数の記数法 ・小数の計算（小数の乗・除） ・分数の計算（異分母分数の加・減など，分数の乗・除）
第６学年	・分数の計算（分数の乗・除） ・小数や分数の四則計算の定着と活用

	中学校（数と式）
第１学年	・正の数・負の数 ア　正の数と負の数の必要性と意味（数の集合と四則） イ　正の数と負の数の四則計算の意味 ウ　正の数と負の数の四則計算 エ　正の数と負の数を用いること
	・文字を用いた式 ア　文字を用いることの必要性と意味 イ　乗法と除法の表し方 ウ　一次式の加法と減法の計算 エ　文字を用いた式に表すこと（不等式を用いた表現）
	・一元一次方程式 ア　方程式の必要性と意味及びその解の意味 イ　等式の性質と方程式の解き方 ウ　一次方程式を解くことと活用すること（比例式）
第２学年	・文字を用いた式の四則計算 ア　簡単な整式の加減及び単項式の乗除の計算 イ　文字を用いた式で表したり読み取ったりすること ウ　目的に応じた式変形
	・連立二元一次方程式 ア　二元一次方程式の必要性と意味及びその解の意味 イ　連立方程式とその解の意味 ウ　連立方程式を解くことと活用すること
第３学年	・平方根 ア　平方根の必要性と意味（有理数・無理数） イ　平方根を含む式の計算 ウ　平方根を用いること
	・式の展開と因数分解 ア　単項式と多項式の乗法と除法の計算 イ　簡単な式の展開や因数分解 ウ　文字を用いた式でとらえ説明すること
	・二次方程式 ア　二次方程式の必要性と意味及びその解の意味 イ　因数分解や平方完成して式を解くこと ウ　解の公式を用いて二次方程式を解くこと エ　二次方程式を活用すること

高等学校		
数学Ⅰ	数と式，図形と計量，二次関数及びデータの分析について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察する能力を培い，数学のよさを認識できるようにするとともに，それらを活用する態度を育てる。	数と式 図形と計量 二次関数 データの分析
数学Ⅱ	いろいろな式，図形と方程式，指数関数・対数関数，三角関数及び微分・積分の考えについて理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し表現する能力を養うとともに，それらを活用する態度を育てる。	いろいろな式 図形と方程式 指数関数・対数関数 三角関数 微分・積分の考え
数学Ⅲ	平面上の曲線と複素数平面，極限，微分法及び積分法についての理解を深め，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに，それらを積極的に活用する態度を育てる。	平面上の曲線と複素数平面 極限 微分法 積分法
数学Ａ	場合の数と確率，整数の性質又は図形の性質について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察する能力を養い，数学のよさを認識できるようにするとともに，それらを活用する態度を育てる。	場合の数と確率 **整数の性質** 図形の性質
数学Ｂ	確率分布と統計的な推測，数列又はベクトルについて理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察する能力を伸ばすとともに，それらを活用する態度を育てる。	確率分布と統計的な推測 数列 ベクトル
数学活用	数学と人間のかかわりや数学の社会的有用性について認識を深めるとともに，事象を数学的に考察する能力を養い，数学を積極的に活用する態度を育てる。	数学と人間の活動 社会生活における数理的な考察

３　２０１４年　国公立大学入試問題（一部抜粋）

岩手大学　農　問５

次の問いに答えよ。

⑴　$xy+y^2+xz+yz$ を因数分解せよ。

⑵　a , b , c （$a<b<c$）は連続した自 然数とする。このとき，

$ab+b^2+ac+bc$

を４で割った余りが３であることを示せ。

⑶　a , b , c （$a<b<c$）は連続した自然数とする。このとき，

$a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2+2abc$

は６の倍数であることを示せ。

（解答）

⑴　$xy+y^2+xz+yz=(x+y)(y+z)$

⑵　n を自然数として，$a=n$，$b=n+1$，$c=n+2$とおけて，⑴から

$$ab+b^2+ac+bc=(a+b)(b+c)$$
$$=(2n+1)(2n+3)$$
$$=4n(n+2)+3$$

よって，４で割った余りは３である。

⑶　因数分解すると，

$a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2+2abc$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

⑵と同様に a , b , c を定めると

$(2n+1)(2n+2)(2n+3)$

これは，連続する３つの自然数の積だから，２の倍数かつ３の倍数となり６の倍数である。

東京工業大学　理･工･生命理工　問１

３以上の奇数 n に対して，a_nとb_nを次のように定める。

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\quad b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

⑴　a_nとb_nはどちらも整数であることを示せ。

⑵　a_n-b_n は４の倍数であることを示せ。

（解答）

⑴　$k-1$, k , $k+1$ は連続３整数であるので，２の倍数および３の倍数を少なくとも１つ含む。

よって，$(k-1)k(k+1)$は６の倍数であるので，

$(k-1)k(k+1)=6q_k$ （q_k は整数）…（＊）

とおけて

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)k(k+1)}{6}=\sum_{k=1}^{n-1}q_k \cdots①$$

また，n が３以上の奇数より，$n=2m+1$（m は正の整数）…②とおけて

$$b_n=\frac{(2m+1)^2-1}{8}=\frac{m(m+1)}{2}$$

m , $m+1$ は連続２整数であるので，m , $m+1$ のいずれかは偶数であり，したがって

$m(m+1)=2p$（p は整数）とおけるから，

$b_n=p$ これと①より，a_n , b_n ともに整数である。

⑵　$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k)$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(n-1)^2n^2-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n-2)$$

$$a_n-b_n=\frac{1}{24}(n-1)(n+1)\{n(n-2)-3\}$$
$$=\frac{1}{24}(n-1)(n+1)^2(n-3)$$
$$=\frac{2}{3}m(m+1)^2(m-1)\ （②より）$$

（＊）と同様に

$(m-1)m(m+1)=6q$（q は整数）

とおけるから

$$a_n-b_n=\frac{2}{3}\cdot 6q(m+1)=4q(m+1)$$

よって，a_n-b_n は４の倍数である。

京都大学　理系　問５

自然数 a , b はどちらも３で割り切れないが，a^3+b^3 は８１で割り切れる。このような a , b の組（ a , b ）のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときのa^2+b^2 の値を求めよ。

（解答）

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$が３で割り切れるから，$a+b$ も３で割り切れる。

$a^3+b^3=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$で$a+b=3k$

（以下文字は正の整数）とおくと

$a^3+b^3=3k(9k^2-3ab)=9k(3k^2-ab)$で a, b は３の倍数ではないから $3k^2-ab$ は３の倍数ではない。

よって，$9k(3k^2-ab)$ が８１の倍数になるのは k が９の倍数になることが必要十分である。

よって，$a+b$ は２７の倍数になることが必要十分である。$a+b=l$ とおく。l を固定したとき，

$a^2+b^2=a^2+(l-a)^2=2a^2-2al+l^2$

$=2\left(a-\dfrac{l}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}l^2$

は a が $\dfrac{l}{2}$ に近いほど小さい。

$l=27$ のとき，（a, b）＝（13，14），（14，13）で最小値３６５をとる。ただし，$l\geqq 27\cdot 2$ のとき

$a^2+b^2=2\left(a-\dfrac{l}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}l^2\geqq\dfrac{1}{2}l^2\geqq\dfrac{1}{2}(27\cdot 2)^2$

$=1458>365$

であるから，a^2+b^2 の値は最小にならない。

名古屋市立大学　経済　問１

自然数 x, y, z は条件 $x\leqq y\leqq z$ および $xy+yz+zx=xyz$ を満たすとする。

次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $x\leqq 3$ を示せ。

(2)　与えられた条件を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

（解答）

(1)　$0<x\leqq y\leqq z$ より，$xy\leqq zx\leqq yz$ だから

$xy+yz+zx\leqq yz+yz+yz$

$xy+yz+zx=xyz$ …①より

$xyz\leqq 3yz$

よって，$x\leqq 3$

(2)　$0<x\leqq 3$ より，$x=$１，２，３

$x=1$ のとき，①より　$y+yz+z=yz$

$y+z=0$

これを満たす自然数 y, z は存在しない。

$x=2$ のとき，①より　$2y+yz+2z=2yz$

$(y-2)(z-2)=4$

$2=x\leqq y\leqq z$ より　$0\leqq y-2\leqq z-2$ だから

$(y-2, z-2)=$（1,4），(2,2)

$(y, z)=$（3,6），(4,4)

$x=3$ のとき，①より　$3y+yz+3z=3yz$

$(2y-3)(2z-3)=9$

$3=x\leqq y\leqq z$ より　$3\leqq 2y-3\leqq 2z-3$だから

$(2y-3, 2z-3)=$（3,3）

$(y, z)=$（3,3）

以上より

$(x, y, z)=$（2,3,6），(2,4,4)，(3,3,3)

４　東京大学入試問題にみる「整数問題」

２０１４年　問５

rを０以上の整数とし，数列｛a_n｝を次のように定める。

$a_1=r$，$a_2=r+1$，$a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$

また，素数 p を１つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，０を p で割った余りは０とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$の場合に，１０以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある２つの相異なる自然数 n, m に対して，$b_{n+1}=b_{m+1}>0$，$b_{n+2}=b_{m+2}$ が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，…に pで割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

（解答）

⑴　a_nとb_nの定義から，任意の自然数nに対し　$a_n=pq_n+b_n$　となる整数q_nが存在する。$\{q_n\}$の要素を用いると

$$a_{n+1}=pq_{n+1}+b_{n+1}$$
$$a_{n+2}=pq_{n+2}+b_{n+2}$$　より
$$\begin{aligned}b_{n+2}&=a_{n+2}-pq_{n+2}\\&=a_{n+1}(a_n+1)-pq_{n+2}\\&=(pq_{n+1}+b_{n+1})(pq_n+b_n+1)-pq_{n+2}\\&=b_{n+1}(b_n+1)+p\{pq_{n+1}q_n+q_{n+1}(b_n+1)+b_{n+1}q_n-q_{n+2}\}\end{aligned}$$

よって，b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りと一致する。

⑵　$a_1=r=2$，$a_2=r+1=3$であるから，$b_1=2$，$b_2=3$である。任意の自然数nに対しb_{n+2}は⑴で示したように$b_{n+1}(b_n+1)$を１７で割ったときの余りと一致するので，

$b_3=3\times3=9$，$b_4=(9\times4$を17で割った余り$)=2$，

$b_5=(2\times10$を17で割った余り$)=3$

同様に，$b_6=9$，$b_7=2$，$b_8=3$，$b_9=9$，$b_{10}=2$

⑶　異なる自然数n，mについて

$$\begin{cases}b_{n+1}=b_{m+1}>0 & \cdots①\\ b_{n+2}=b_{m+2} & \cdots②\end{cases}$$

が成り立つとする。ここで，②は

$a_{n+1}(a_n+1)-a_{m+1}(a_m+1)$が素数$p$で割り切れる…②′

ことを意味するが，①より

$$\begin{cases}a_{n+1}=p\alpha+b_{n+1}\\ a_{m+1}=p\beta+b_{m+1}\end{cases}$$

（α，β：整数，$b_{n+1}\fallingdotseq 0$）

とおけるので，条件②′は

$$\begin{aligned}&(p\alpha+b_{n+1})(a_n+1)-(p\beta+b_{n+1})(a_m+1)\\&=p\{\alpha(a_n+1)-\beta(a_m+1)\}+b_{n+1}(a_n-a_m)\end{aligned}$$

がpで割り切れること。したがってa_n-a_mがpで割り切れることを意味する。

したがって，$b_n=b_m$でなければならない。

⑷　数列$\{b_n\}$に現れる数は，pで割ったときの剰余である０，１，２，…，$p-1$のp通りのいずれかであるから，その連続２項の対（b_n，b_{n+1}）のとり得る組み合わせも高々p^2通りである。よって，

（b_1，b_2），（b_2，b_3），…（b_n，b_{n+1}），…

という無限列の中に一致するものが存在する。

そこで　$\begin{cases}(b_k, b_{k+1})=(b_l, b_{l+1})\\ k<l\end{cases}$　と仮定する。

kは自然数であるから，このようなものの中で最小であると仮定していよい。

他方$l\geqq2$であるので，a_2，a_3，a_4，…がpで割り切れないという仮定より　$b_l\fallingdotseq 0$である。

さて，$k>1$であるとすると，⑶で示したことによって　$b_{k-1}=b_{l-1}$　となるはずであるから，（b_{k-1}，b_k）＝（b_{l-1}，b_l）が成り立つことになり，上で述べたkの最小性に反する。

よって，$k=1$でなければならない。このとき（b_1，b_2）＝（b_l，b_{l+1}）より　$b_1=b_l$であるが，$b_l\fallingdotseq 0$より$b_1\fallingdotseq 0$であるので，a_1はpで割り切れない。

5　まとめ

東京大学の問題において，(1)は合同式を使うともっと簡単に考えることができる。

$$\begin{cases}a_n\equiv b_n\\ a_{n+1}\equiv b_{n+1}\end{cases}\Longrightarrow a_{n+1}(a_n+1)\equiv b_{n+1}(b_n+1)$$

入試問題では，数列や確率，方程式などいろいろな単元と融合されている。

整数は，実社会では情報セキュリティや通信の世界で活用されている。（例えば暗号やコードなど）まだまだ活用されると考えられるので，そういった意味でも整数の単元はとても重要である。