

# 「数学」を身近なものに —課題学習をふまえて—

愛媛県立三瓶高等学校

藤原 治永

## 1 はじめに

平成27年度より課題研究委員会に所属し、研究を重ねている。本校での課題学習の主な取組は、①各分野・各単元の終わりに応用的な内容の授業を行う。②長期休業中の課題としてレポート（テーマは自由）を課し、提出してきたレポートを評価した後、面白い着眼点や良いレポートを生徒達に紹介する。ただし、②については、生徒たちもネットや書籍から題材を見つけてきてレポートを作成してくるのだが、目を見張るようなレポートにはなかなか出会えない。今年度は、1年生の授業を担当していないことも有り、数学Ⅱを履修中および履修済みの2・3年生を対象に、数学に対する興味・関心を起こさせることができるよう、身近な物品や題材を利用した課題研究の実施を試みた。

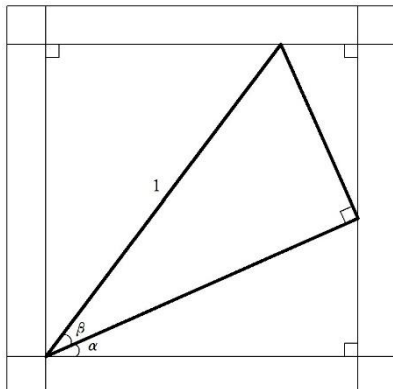
## 2 研究・実践内容

### (1) 三角関数の加法定理について（2年生）

三角関数の加法定理を幾何的に示そうとしている例をSNSで見かけたので、その例と教科書の証明を参考にして実践した。

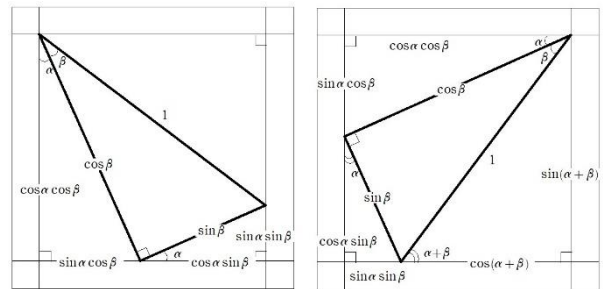
公式をそのまま覚えるよりも、三角比の意味や物理等の他教科における数学の活用にも役立つことができると考えた。

課題「下図のように、15cm四方の折り紙から幅1.5cmの幅を取り、中央に直角三角形をつくる。左下に角度 $\alpha$ と $\beta$ をとり、中央の直角三角形の斜辺を1としたとき、残りの直角三角形の辺や角度を $\alpha$ 、 $\beta$ とその三角比を使って表せ。」



しばらく様子を見ていたが、三角比の意味を忘れていた生徒も居たので、「中央の三角形について、底辺は斜辺の余弦倍の $\cos \beta$ 、対辺は斜辺の正弦倍となる $\sin \beta$ となる」ことを確認させた。

どの角度からでも見やすくするため、折り紙を利用して考えさせた。正方形の中に4つの直角三角形があるが、どの三角形も折り紙を回転させることにより、直角が右下に持ってくるることができる。



下の写真の様に、目の前で見せながら話し合っていた生徒も居り、予想外のメリットであった。



この折り紙による試行錯誤の結果から加法定理を導くことができる。実際には錯角を使わず、 $\alpha + \beta$ ではなく、 $90^\circ - (\alpha + \beta)$ を利用して生徒が居た。 $90^\circ - \theta$ の公式を使う復習にもなった。

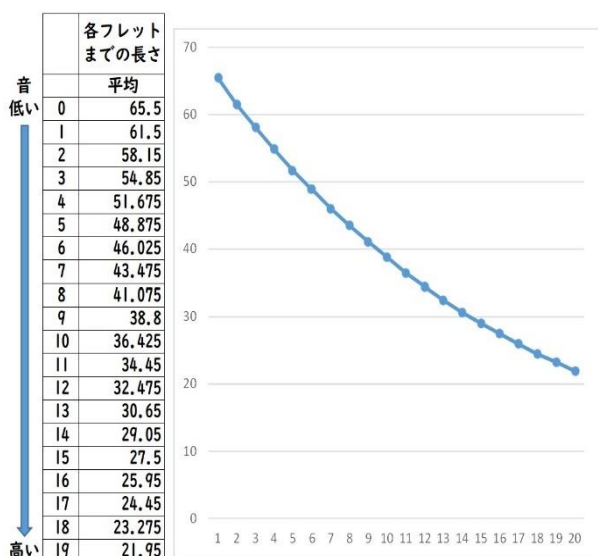
身近な折り紙を用いることで、普段とは違う雰囲気が生まれたことは事実であるが、折ることを含めた活動にできるように今後、考えたい。

## (2) 弦楽器の「音」と「弦長」の関係（3年生）

音は周波数で表すことができる。ギターは弦を支える駒からフレットの元の長さが長いほど低く、短いほど高い音が出る。これはどの弦楽器にも言える。音楽で使用しているギターを借りて、駒から各フレットまでの長さを測り、考察した。



「高い音と低い音の平均をとると、1ずつ下がる」「差を取って見たら何か法則がある」などの予想があった。実際に計算してみると、その予想は外れ、法則は見つからない。そこで、エクセルでグラフをかくと、「反比例」との意見が出たが、これもすぐに違うことが確認された。



差を取ってダメなら、和や積、商（比）を計算してみることにした。その結果、半音1つ上がると、各フレットまでの長さは約0.94倍となっていた。ゆえに、半音上がる毎に、駒からフレットまでの長さは指数関数的に減少していくことが分かった。周波数を測定するソフトやアプリが準備できれば、「1オクターブ（12音）高くなると、周波数は2倍になり、弦の長さは1/2倍になる」ことや「半音1つ高くなると、周波数が約1.06倍（2の12乗根が約1.06であり、その逆数は0.94）となる」ことまでたどりつきたかった。また、上記の表において、長さの小さい順に並び変えて比を取ると、約1.06倍ずつになっていることが分かる。

また、十三弦の箏についても、調べてみた。



それぞれの音階の、柱までの弦の長さを測定したが、ギターの様に半音ずつフレットがなく、温度や張り具合により音程が変わるためか、ギターと同じ傾向は出てこなかった。データの数を多くとることが出来れば、同じ傾向が出てくるかもしれない。

同じ弦楽器であるピアノについては、弦が多すぎるので、観察のみにとどめた。実際には弦の材質や本数、そして張力によって調整される。高い音の弦は3本あり、低くなるにつれ、その数は少なくなっていく、弦の太さは大きくなっていくことが観察できる。

## (3) 31415926は2進数では何桁か？（3年生）

2020は10進数では4桁の数である。

$$\begin{aligned}
 \log_{10}2020 &= \log_{10}(2.02 \times 10^3) \\
 &= \log_{10}2.02 + \log_{10}10^3 \\
 &= 0.3054 + 3 \\
 &= 3.3054 \\
 3 < \log_{10}2020 < 4 \text{ より } 10^3 < 2020 < 10^4
 \end{aligned}$$

の様に、常用対数の値から小数点以下を切り捨て、1を加えればその桁数は4桁であることが確認できる。桁数を求める間は常用対数を利用した典型的な問題である。1年生の「数学Ⅰ」や「社会と情報」の時間で2進数を学習しているので、次の課題を出してみた。

**課題「2進数における2019の桁数を、対数を用いて求めることができないだろうか？」**

また、31415926を2進数に直したとき、何桁の数になるかを答えよ。」

2019を2進数に直すと、11111100011となり、11桁の数である。また、31415926を2進数に変えると、1110111110101111001110110となり、25桁になる。

10進数では常用対数をとったので、2進数では底を2とする対数の値をとればよい。

$$\begin{aligned} \log_2 2019 &= \log_{10} 2019 / \log_{10} 2 \\ &\approx 3.3054 / 0.301 \\ &= 10.981\dots \\ 10 < \log_2 2020 < 11 \text{ より } 2^{10} < 2020 < 2^{11} \\ 2020 &\text{は2進数で11桁の数である。} \\ 2019 &\text{は2進数で11桁の数であろう。} \end{aligned}$$

同様に考えると

$$\begin{aligned} \log_2 31415926 &= \log_{10} (3.1415926 \times 10^7) / \log_{10} 2 \\ &\approx (\log_{10} 3.14 + 7) / \log_{10} 2 \\ &= 7.4969 / 0.301 \\ &= 24.906\dots \\ 24 < \log_2 31400000 < 25 \text{ より } 2^{24} < 31400000 < 2^{25} \\ 31400000 &\text{は2進数で25桁の数である。} \\ 31415926 &\text{は2進数で25桁の数であろう。} \end{aligned}$$

常用対数表の代わりに、次のような $2^x$ の表を作成して確認した。

誤差を考えると、常用対数表を作成したネイピアには頭が下がる。

x	2 <sup>x</sup>
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536

x	2 <sup>x</sup>
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648
32	4294967296
33	8589934592
34	17179869184
35	34359738368

しかし、技術の進歩はたいしたもの、エクセルで「=log(2019,2)」や「=log(31415926,2)」と計算式を入力すれば、その値を返してくれる。次の表はエクセルで作成した(計算上の誤差はあるだろうが)1024, 2019, 2048, 2<sup>24</sup>, 31415926, 2<sup>25</sup>の対数表である。(ただし、小数第3位まで)

機会があれば、2の対数表の作成方法についても研究してみたい。

数 \ 底	2	3	5	7	10
1024	10.000	6.309	4.307	3.562	3.010
2019	10.979	6.927	4.729	3.911	3.305
2048	11.000	6.940	4.737	3.918	3.311
16777216	24.000	15.142	10.336	8.549	7.225
31415926	24.905	15.713	10.726	8.871	7.497
33554432	25.000	15.773	10.767	8.905	7.526

### 3 研究のまとめと今後の課題

今年度は、身近なものを利用したり、考察したりすることを念頭に置いて実践した。今回も思考を補助するツールとしてエクセルやタブレットを用いた。また、今回は他教科に関連付けた内容を取り入れた。

この研究を行うことで、生徒たちの主体的な学習を促し、数学に対する興味・関心を高めることができた。また、自分自身も教科書以外の見方や考え方を習得することができた。

課題としては、題材の選定が挙げられる。課題を提示し説明することは簡単なのだが、学びが深まる授業展開になるように、提示や展開の工夫が必要である。また、身近な物や事象を計測してデータ・グラフ化した後の考察力が低いこと、スマートフォンやパソコンを分析するツールとして利用するスキルが低いことが気になった。

昨年3月に告示された新学習指導要領では、「数学Ⅱ」および「数学Ⅲ」に課題学習が新設された。今後も生活と関連付けた課題を設け、生徒の疑問を取り上げていくなど、今後も研究を続けていきたい。

#### 《参考文献》

- ・「生き抜くための数学入門」(イーストプレス)
- ・「最強に面白い!! 対数」(ニュートンプレス)