極限を扱った入試問題の研究

愛媛県立西条高等学校　三浦　怜也

1　はじめに

西条高校に勤務して３年目になった。初年度と昨年度は１年生の授業を主に担当し、前任校では数学Ⅰ、数学A、数学Ⅱまでしか履修しないため、数学B、数学Ⅲの授業は実に７年ぶりになる。少々不安を覚えながら授業準備にいそしんでいる中、今回の研究委員会のテーマを何にするか迷っていたが、現在理型のクラスの授業を担当しているため、今後の授業準備もかねて数学Ⅲの基本ともいえる「極限」について研究してみることにした。「極限」の問題は幅広いが、今回は主に数列の極限を求めさせる問題に注目して研究することにした。

２　大学入試問題の研究

○漸化式から一般項を求め、極限を求める。

＜2019年宮城教育大学　前期日程＞

次の問いに答えよ。

(1)　実数 x が $x<1$ を満たすならば、$\dfrac{1}{4-3x}<1$ が成り立つことを示せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{1}{4-3a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき、

$$3(1-a_{n+1})(1-a_n)=3(1-a_n)-(1-a_{n+1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$b_n=\dfrac{1}{1-a_n}$ とおくことにより、(2) の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　(2) の数列 $\{a_n\}$ について極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

誘導に従って漸化式から一般項をつくり、極限を求める。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-3x}-1$ として、

$f'(x)=\dfrac{3}{(4-3x)^2}$ となり、

$x<1$ の範囲において単調増加。

$f(1)=0$ なので、$x<1$ において $f(x)<0$

よって、$\dfrac{1}{4-3x}<1$ は示された。

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{4-3a_n}$ なので

$$a_{n+1}(4-3a_n)=4a_{n+1}-3a_{n+1}a_n$$
$$=a_{n+1}+3a_{n+1}(1-a_n)=1$$

つまり、　$1-a_{n+1}=3a_{n+1}(1-a_n)$

(右辺)$=3(1-a_n)-3a_{n+1}(1-a_n)$

$=3(1-a_n)(1-a_{n+1})=$(左辺)

よって成り立つ。

(3) $b_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_{n+1}}$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{4-3a_n}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-a_n}+1=\frac{1}{3}b_n+1\ \cdots①$$

と変形して一般項を求める。または、(2) の等式から①の漸化式を導いてもよい。そのとき、

$1-a_n>0$ を示す点に注意が必要。

(4) (3)より、$a_n=\dfrac{3^{n-1}-1}{3^n-1}$ なので、

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}$$

となる。

●類題

＜2018年徳島大学　前期日程＞

数列 $\{a_n\}$ は次を満たす。

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{4-a_n}{a_n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

(1)　$a_n=b_n+2$ とおくとき、b_{n+1} を b_n で表せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{c_n}$ とおくとき、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

徳島大学の問題も同じ傾向の問題である。

$a_n=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ の漸化式は多くの大学で出題されている。

●類題

＜2018年滋賀医科大学　前期日程＞

複素数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$a_1=\frac{3+i}{3-i},\ a_{n+1}=\frac{a_n-5}{1-5a_n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

と定める。また、

$$b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}i\ (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく。ただし、i は虚数単位である。

(1)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2)　b_n は実数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n+1|$ を求めよ。

(4)　複素数平面上において、すべての点 a_n は同一円周上にあることを示せ。

滋賀医科大の問題は、複素数平面との融合問題であるが、b_n の漸化式から一般項をつくることで極限を求めることができる。

○図形の規則性から漸化式を作り極限を求める。

＜2019横浜国立大学　後期日程＞

O を原点とする xy 平面上に、点 $\mathrm{A}_n\left(\cos\dfrac{\pi}{2^n}, \sin\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

$(n=1, 2, 3,\cdots)$ がある。また、以下の(ⅰ)から(ⅲ)を満たす点 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ および点 Q_1, Q_2, Q_3, $\cdots$ がある。

(ⅰ) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して、 P_n, Q_n は半直線 OA_n 上にある。

(ⅱ) P_1 の座標は $(0, 1)$ である。

(ⅲ) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して、

$$P_nP_{n+1}\perp OA_{n+1}, \quad P_{n+1}Q_n\perp OA_n$$

である。

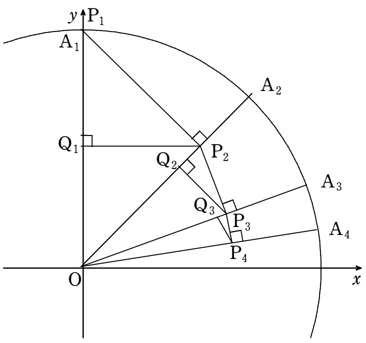
次の問いに答えよ。

(1) $n=1, 2, 3,\cdots$ に対して、 $\dfrac{P_{n+2}Q_{n+1}}{P_{n+1}Q_n}$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} OP_n$ を求めよ。

(1) では $P_{n+1}Q_n$ を OP_{n+1} を用いて表すことで求める。(2) では、(1) を利用して OP_{n+1} と OP_n の漸化式を求め、そこから一般項を導く。そのとき、

$OP_n=\dfrac{OP_n}{OP_{n-1}}\cdot\dfrac{OP_{n-1}}{OP_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{OP_2}{OP_1}\cdot OP_1$ のように項数を落としていき、一般項を求める。



(1) $P_{n+1}Q_n=OP_{n+1}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}P_{n+2}Q_{n+1}&=OP_{n+2}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\\&=OP_{n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\\&=OP_{n+1}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\frac{P_{n+2}Q_{n+1}}{P_{n+1}Q_n}=\frac{OP_{n+1}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{OP_{n+1}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}$$

(2) $OP_{n+1}=OP_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ なので、

$\dfrac{OP_{n+1}}{OP_n}=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ から、

$$\begin{aligned}OP_n&=\frac{OP_n}{OP_{n-1}}\cdot\frac{OP_{n-1}}{OP_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{OP_2}{OP_1}\cdot OP_1\\&=\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot 1\end{aligned}$$

ここで両辺に $\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ をかけ、2倍角の公式を順に当てはめて

$$\begin{aligned}&OP_n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\\&=\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot 1\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\cdots\cdot 1\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2^{n-2}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}\cdot\cdots\cdot 1\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\end{aligned}$$

$$OP_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}OP_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$

●類題

＜2019年九州大学　前期日程＞

座標平面上の3点 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり、 A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2, P_3, $\cdots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし、点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし、点 R_n から線分AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n\to\infty$ のとき、 P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

九州大学の問題は、正三角形であることを利用して AP_n と AP_{n+1} の漸化式をつくれば、あとは容易に極限を求めることができる。

○確率との融合問題

＜2019年北海道大学　後期日程＞

n を3以上の自然数とする。当たりくじ2本を含む n 本のくじがある。くじを引いて、当たりなら持ち点に1を加算し、はずれなら持ち点は変わらないとする。最初の持ち点は0点とし、くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す。

k を0以上の整数とする。 n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする。

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(k)$ を求めよ。ただし、 e を自然対数の底とするとき、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}$ であることを用いてもよい。

(3) $p(k)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(k)$ と定める。値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ。

確率との融合問題は、漸化式をつくるパターンと、つくらずに求めるパターンがある。北海道大学の問題は漸化式をつくらずに一

般項をつくり、極限を利用して(3)では $p_n(k)$ の最大値を求める。

(1) n 回のうち k 回あたりを引けばいいので

$0 \leqq k \leqq n$ のとき

$$p_n(k) = {}_nC_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}$$

$k > n$ のとき

$$p_n(k) = 0$$

(2)
$$
\begin{aligned}
p_n(k) &= {}_nC_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}\\
&= {}_nC_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\\
&= {}_nC_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(\frac{n}{n-2}\right)^{k}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\\
&= \frac{n\,!}{k\,!(n-k)!}\left(\frac{2}{n-2}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\\
&= \frac{2^k}{k\,!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{(n-2)^k}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\\
&= \frac{2^k}{k\,!}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\\
&\qquad\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\\
&= \frac{2^k}{k\,!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdot\cdots\\
&\qquad\cdots\cdot\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}
\end{aligned}
$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{2^k}{k\,!}e^{-2}$

(3)
$$
\begin{aligned}
p(k) &= \frac{2^k}{k\,!}e^{-2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{k}e^{-2}\\
&\leqq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2}e^{-2} = 2e^{-2}
\end{aligned}
$$

$p(1) = p(2) > p(3) > p(4) > \cdots > p(k)$ なので

よって $k = 1, 2$ のとき最大値。

●類題

＜2019年奈良女子大学　前期日程＞

n を 2 以上の整数とする。1 つのさいころを n 回投げ、出た目を 1 回目から順に $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする。それらの積 $x_1x_2\cdots x_n$ がちょうど 6 になる確率を $p(n)$， 6 以下になる確率を $q(n)$ とする、以下の問いに答えよ。

(1)　$p(2)$, $q(2)$ を求めよ。

(2)　$p(n)$, $q(n)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$ を求めよ。

奈良女子大学の問題も漸化式をつくらず一般項をつくり極限を求める。

$p(n) = \dfrac{n^2}{6^n}$ 、 $q(n) = \dfrac{(n+2)(3n+1)}{2\cdot 6^n}$ なので、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+2)(3n+1)}$ となり、分母分子を n^2 で割れば極限を求めることができる。

●類題

＜2019年電気通信大学　前期日程＞

1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころがある。数直線上の点P に対して、このさいころを投げるたびに、次の操作を行うものとする。

(a) 1, 3, 5 の目が出たときは、点P を正の方向へ 2 動かす。

(b) 6 の目が出たときは、点P を正の方向へ 1 動 かす。

(c) 2, 4 の目が出たときには、点P は動かさない。

以下の(1)、(2) の問いに答えよ。なお 0 はすべての整数の倍数である。

(1)　点P が原点O にある状態から、さいころを投げて上の操作を行うことを n 回繰り返した後の点

P の座標が2 の倍数である確率を p_n とする。

(ⅰ) p_1, p_2 を求めよ。

(ⅱ) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。さらに p_n を n の式で表せ。

(2)　点P が原点O にある状態から、さいころを投げて上の操作を行うことを n 回繰り返した後の点P の座標が 3 の倍数である確率 を q_n とする。

(ⅰ) q_2 を求めよ。

(ⅱ) q_{n+2} を q_n を用いて表せ。

(ⅲ) q_n を求めよ。さらに極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。

電気通信大学の問題は、確率漸化式の融合問題である。(1) は定番の確率漸化式で、(2) は隣接していない 2 項間漸化式なので n が奇数のときと偶数で場合分けして求めればよい。

〇はさみうちの定理を利用

＜2019年信州大学　前期日程＞

次の問いに答えなさい。

(1)　$x \geqq 0$ において、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2)　次の極限を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

(3)　自然数 n に対して、

$$P_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めなさい。

(1) は $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \dfrac{1}{2}x^2\right)$

$g(x) = x - \log(1+x)$　　とおき、

$f(x)$と $g(x)$ の増減を調べれば証明することができる。

(2) は区分求積法を利用する。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

ここで、 $x=2\sin\theta$ とおけば、求めることができる。

よって $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}$$

(3) $P_n>0$ なので、両辺の対数をとると、

$\displaystyle\log P_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)$ となる。

(1)の不等式において $x=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}$$
$$\leqq\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

なので、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-k^2}$$
$$\leqq\log P_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\cdots①$$

が成り立つ。

ここで $\displaystyle 0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-k^2}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3n^2}=\frac{1}{3n}$

なので、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-k^2}=0$

したがって、(2)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\frac{\pi}{6}$

であるから $n\to\infty$ のとき①の左辺も右辺も $\dfrac{\pi}{6}$ に収束する。よってはさみうちの定理から

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=\frac{\pi}{6}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=e^{\frac{\pi}{6}}$

●類題

＜2019年高知大学　前期日程＞
次の問いに答えよ。

(1) $x>1$ **を満たす実数** x **に対して、** $x-\log x\geqq1$ **であることを示せ。**

(2) **正の整数** n **に対して、** $2(\sqrt{n}-1)\geqq\log n$ **であることを示せ。**

(3) **2 以上の整数** n **に対して、**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{k}{n}\leqq\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x\,dx\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{k+1}{n}$$

であることを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k\right)-\log n\right)$ **を求めよ。**

高知大学の問題もはさみうちの定理で求めることができる。(3)の誘導からどの数式ではさみうちの定理を用いればよいか考えやすい。

●類題

＜2018年大阪市立大学　前期日程＞

n を自然数とする。 $0\leqq a_k\leqq1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

とおく。実数 x に対して、

$$I_n(x)=b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) $a\geqq0$ とする。 $x\geqq0$ に対して不等式

$$1-ax\leqq e^{-ax}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $\displaystyle\int_0^1 I_n(x)dx\leqq1$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=1$ が成り立つとき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I_n(x)dx=1$$

となることを示せ。

大阪市立大学の問題も (2) からどの数式ではさみうちの定理を用いればよいかが誘導されている。

●類題

＜2019年東京大学　前期日程＞

以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。 x についての方程式

$$x^{2n-1}=\cos x$$

はただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1) で定まる a_n に対し， $\cos a_n>\cos1$ を示せ。

(3) (1) で定まる数列 a_1 , a_2 , $\cdots$, a_n , $\cdots$ に対し,

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,\ b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^2,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

東京大学の問題も(3)の a_n の極限を求めるときにはさみうちの定理を用いる。その $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の結果を用いて、 b_n の極限を求める。

○不等式を繰り返し用いてはさみうちの定理

＜2018年神戸大学　前期日程＞

k を 2 以上の整数とする。また、

$$f(x)=\frac{1}{k}\left((k-1)x+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において、関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$, $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$を満たすとき、 $x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し、

$$x_{n+1}-1<\frac{k-1}{k}(x_n-1)$$

を示せ。また、$\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

(1) は導関数を求め、増減表をかいてグラフをかけばよい。$k \geqq 2$ なので、場合分けも必要ない。

(2) 数学的帰納法を用いて証明する。そのとき、(1)の結果から $f(x)$の最小値は $f(1)$ であることを利用する。

（ⅰ）$x_1 > 1$ である。

（ⅱ）$n=m$ のとき成り立つと仮定すると、$x_m > 1$ である。

$n=m+1$ のとき、

$x_{m+1}=f(x_m)>f(1)=1$ となり成り立つ。

よって示せた。

(3) $x_n>1$ であるので、

$\dfrac{x_{n+1}-1}{x_n-1}<\dfrac{k-1}{k}$ を示せばよい。

平均値の定理より、

$\dfrac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=\dfrac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$

を満たす実数 c が存在する。$(1<c<x_n)$

ここで、$f'(c)=\dfrac{k-1}{k}\cdot\dfrac{c^k-1}{c^k}<\dfrac{k-1}{k}$

であり、$\dfrac{x_{x+1}-1}{x_n-1}<\dfrac{k-1}{k}$

$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ が成り立つ。

これを繰り返し用いて

$$\begin{aligned}x_n-1&<\frac{k-1}{k}(x_{n-1}-1)\\&<\left(\frac{k-1}{k}\right)^2(x_{n-2}-1)\\&<\left(\frac{k-1}{k}\right)^3(x_{n-3}-1)\\&<\cdots<\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-1)\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{k-1}{k}\right|<1$ なので

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-1)=0$

であるから、

$\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\lim_{n\to\infty}x_n=1$

●類題

＜2018年名古屋工業大学　前期日程＞

関数 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$a_1=3\,,\,a_{n+1}=f(a_n)\quad(n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$

方程式 $f(x)=x$ の解をα とおく。次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して、$a_n>\alpha$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 n に対して、$a_{n+1}-\alpha<\dfrac{1}{2}(a_n-\alpha)$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し、$\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

名古屋工業大学の問題も(2)から不等式を繰り返し変形することで、はさみうちの定理を用いる数式を求めることができる。

3　おわりに

今回の数列の極限についての研究を通してまず最初に感じたことは、数学Bの漸化式を十分な演習をこなしていなければいけないことである。極限を求めるのはおまけで、漸化式から一般項を求めることができるかが問われている問題が多い。様々な形式の漸化式が出題されているが $a_n=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ の分数式のタイプの出題が多かった。誘導に上手に乗ることができれば極限を求めることができるであろう。

次に重要なのはやはり「はさみうちの定理」である。こちらも多くの出題形式があった。はさみうちの定理を用いるべき不等式が小問の中で誘導されている問題も多くあるが、誘導が少ない場合でも気づけるように標準的な入試問題の演習を繰り返す必要がある。また、関数と絡ませている場合は「平均値の定理」も意識しながら問題にあたるとよい。

数学科の教員にとって数学Ⅲの授業を担当できる機会はとても貴重である。高校数学の集大成ともいえる数学Ⅲを担当したときに、生徒に正しい知識と数学的な考え方を身に付けさせることができるように今後も研究を重ねていきたい。

4　参考文献

2020年受験用全国大学入試問題正解国公立大学編
（旺文社）

2019年受験用全国大学入試問題正解国公立大学編
（旺文社）