大学入試研究委員会

本研究委員会は，８名の研究委員で構成されています。継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれて努力を続けてきました。

大学入試センター試験に関してのアンケートにつきましては，県下の受験生や先生方のご協力をいただき，本年度も集計・分析を終え報告する運びとなりました。ありがとうございました。

先生方のご意見，ご指導をいただき，今後の研究活動に生かして生きたいと思いますので，よろしくお願いします。

本年度の研究一覧は以下の通りです。

１　国公立大学入試問題の研究
　－確率と漸化式－
　愛媛県立今 治 西高等学校　青木　将彦

２　国公立大学入試問題の研究
　－整数問題について－
　愛媛県立宇和島南中等教育学校　川野　星子

３　平成２６年度愛媛大学入試問題（数学）の研究
　愛媛県立　松 山 南　高等学校　近藤　弘法

４　中四国の国公立大学入試問題の研究
　－ＡＯ・推薦入試の問題から－
　愛媛県立　三　　島　高等学校　脇　　智城
　愛媛県立　松 山 北　高等学校　山田　一貴

５　平成２６年度大学入試センター試験アンケートの分析
　愛媛県立　新居浜東　高等学校　藤田　祥夫
　愛媛県立　新居浜西　高等学校　青野　洋介
　愛媛県立　大　　洲　高等学校　岩村　　崇

国公立大学入試問題の研究

―確率と漸化式―

愛媛県立今治西高等学校　青木　将彦

１　はじめに

昨年度２年生と３年生理系の授業を担当した際に、確率と漸化式の指導の在り方について、疑問に感じたことがある。当時、３年生は旧学習指導要領、２年生は新学習指導要領に基づいており、わずか１年の違いで初期の段階から丁寧に学習していることに驚いた。これまでは、３年生の問題演習ではじめて扱うことが多く、考え方から段階を追って丁寧に説明する必要があった。大学入試では難関大学を中心に頻出テーマであり、早めに出題傾向を把握し、対策を立てる必要性を感じている。今年度は、３年生の受験指導も兼ねて、本主題を調査・研究することにした。

２　初期に学習する確率と漸化式

本校の２年生で扱う数学Ｂの教科書には、“研究”として次の例題が掲載されている。

例　さいころを n 回投げるとき､1 の目が偶数回出る確率を p_n とする。ただし、0 は偶数と考える。このとき、次の問いに答えよ。

(1)　p_1 を求めよ。

(2)　p_n と p_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3)　p_n を n の式で表せ。

解答

(1)　さいころを 1 回投げて､1 の目が 0 回であればよい。

つまり、2 ～ 6 の目が出ればよいので、$p_1=\frac{5}{6}$

(2)　さいころを n＋1 回投げて 1 の目が偶数回出る事象は、次の２パターンが考えられる。

ｉ）さいころを n 回投げ終わった時点で 1 の目が偶数回出ており、n＋1 回目は 2 ～ 6 の目が出る。

確率は、$p_n\cdot\frac{5}{6}$

ⅱ）さいころを n 回投げ終わった時点で 1 の目が奇数回出ており、n＋1 回目は必ず 1 の目が出る。

確率は、$(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}$

ここで、ｉ）とⅱ）は互いに排反であるから、

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{5}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}$$

すなわち、$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}$

(3)　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$　である。

すると、数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列だから、$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって、$p_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$

漸化式の基本的な知識と解法が身に付いていることが前提である。黒板を広く使って図をかき丁寧に説明する、プリントに沿って穴埋め形式で知識を定着させるなど、生徒の学習実態に応じた授業展開が必要である。

３　２年生の問題演習で学習する確率と漸化式

本校の２年生で扱う問題演習には、次の問題がある。

問題　四面体 ＯＡＢＣ の頂点を移動する点Ｐがある。
点Ｐは１つの頂点に達してから１秒後に、他の３つの頂点のいずれかにおのおの確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。
最初に頂点 Ｏ にいた点Ｐが n 秒後に頂点Ａにいる確率 p_n を求めよ。

解答　最初に点Ｐは頂点Ｏにあり、１秒後に頂点Ａ、Ｂ、Ｃのいずれかに移動する。移動する確率はそれぞれ等しいから、

１秒後に点Ｐが頂点Ａにいる確率は、$p_1=\frac{1}{3}$

$n+1$ 秒後に点Ｐが頂点Ａにいる確率 p_{n+1} を p_n で表す。

n 秒後に点Ｐは、頂点Ｏ、Ｂ、Ｃのいずれかにいるので、その確率は $1-p_n$ である。

n 秒後から $n+1$ 秒後までを考えると、頂点Ｏ、Ｂ、Ｃからそれぞれ頂点Ａに移動するので、確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。

したがって、$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\frac{1}{3}$ となるから、

$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$

すると、$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$ となり、

数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ は、初項 $p_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列だから、

$p_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

すなわち、$p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

教科書の例題と比較して、誘導がないことに気付く。

「p_1 → p_n と p_{n+1} の間に成り立つ漸化式 → p_n の式」の順に、教科書の例題と同様にして解答を作成すればよいのだが、問題が変わった途端に頭の中が真っ白になる生徒が多いようである。また、n 秒後には点Ｐが必ず頂点Ｏ、Ｂ、Ｃのいずれかにいることになり、言い換えれば“n 秒後に点Ｐが頂点Ａにいない確率”である。余事象の考え方を利用すれば、容易に $1-p_n$ が求められる。指導する立場としては当たり前のように思えるが、生徒はこのあたりが理解しにくいようであり、苦手意識へとつながっていくのである。３年生の大学入試問題演習、志望大学の過去問など自ら解いていく力を養うためにも、２年生で時間をかけて丁寧に指導し、演習量を確保することが大切である。

４　過去４年間の出題傾向

難関大学を中心として以下の大学の前期試験について、調査した。

ア　出題学部　○ 理系、● 文系

イ　系統　◎ 硬貨に関する問題
　　　　　△ さいころに関する問題
　　　　　☆ 玉（球）に関する問題
　　　　　□ 図形に関する問題
　　　　　※ じゃんけんに関する問題
　　　　　◆ カードに関する問題

大 学 名	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年
北海道大				
東北大				
筑波大				
東京大		○●□	○●◎	○●☆
東京工大				○　△
一橋大	●　△	●　△	●　△	●　◎
首都大			○　◆	
横浜国大			○●△	
名古屋大			○●※	
京都大		○　△		○　□
大阪大			○　☆	○　△
大阪市立大		○●◎	●　△	
神戸大			○　△	
岡山大				
広島大	○　◎			
九州大				
熊本大				

一橋大は、毎年出題されている。東京大は、３年連続でテーマを変えて、よく出題されていることがわかる。“確率と漸化式”に限定して調査したため上記の結果であるが、2011 年北海道大前期試験は“場合の数と漸化式”が出題されており、考え方自体は“確率と漸化式”とあまり変わらない。

岡山大、熊本大理系学部は、大問が例年４題である。漸化式は出題されているが、融合問題的な要素として“確率と漸化式”は出題されにくいようだ。東北大、筑波大、九州大は意外と出題されていない。

しかし、全国的な傾向として最近２年間の方が以前よりも、出題頻度は高くなっている。東京大、京都大、大阪大、名古屋大、神戸大など難関大学を目指すのであれば、学習

を積み重ねることが肝要である。

5　受験の演習で活用したい系統別問題

(1)硬貨

2011 年広島大学前期試験（理系）

△ＡＢＣ の頂点は反時計周りに Ａ、Ｂ、Ｃ の順に並んでいるとする。点Ａを出発した石が、次の規則で動くとする。

”コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り、裏が出たときは動かない。コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。”

コインを n 回投げたとき、石が点Ａ、Ｂ、Ｃにある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

(1) a_1, b_1, c_1 の値を求めよ。

(2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ。
また、a_2, b_2, c_2 および a_3, b_3, c_3 の値を求めよ。

(3) a_n, b_n, c_n のうち２つの値が一致することを証明せよ。

(4) (3) において一致する値を p_n とする。p_n を n で表せ。

解答

(1)最初、石は点Ａにある。

a_1 コインを１回投げて裏が出れば、石は点Ａに留まるので、$a_1 = \frac{1}{2}$

b_1 コインを１回投げて表が出れば、石は点Ｂに動くので、 $b_1 = \frac{1}{2}$

c_1 コインを１回投げただけでは、石は点Ｃに動くことはないので、$c_1 = 0$

(2)コインを $n+1$ 回投げたとき、

ｉ）石が点Ａにある確率 a_{n+1}

次の２パターンが考えられる。

ア　コインを n 回投げたとき石が点Ｃにあり、次にコインを投げたとき表が出て、石が点Ａに動く。

確率は、 $c_n \cdot \frac{1}{2}$

イ　コインを n 回投げたとき石が点Ａにあり、次にコインを投げたとき裏が出て、石が動かない。

確率は、$a_n \cdot \frac{1}{2}$

したがって、アとイは互いに排反だから、

$a_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}a_n$

ⅱ）石が点Ｂにある確率 b_{n+1}

同様にして、$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$

ⅲ）石が点Ｃにある確率 c_{n+1}

同様にして、$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$

また、ｉ）～ⅲ）から、

$a_2 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$b_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$c_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{4}$

さらに、$a_3 = \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$b_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$c_3 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(3)すべての正の整数 n について条件を満たすことを数学的帰納法により証明する。

〔Ⅰ〕$n = 1$ のとき、

(1) より$a_1 = b_1$ だから成り立つ。

〔Ⅱ〕$n = k$ のとき、

a_k, b_k, c_k のうちいずれか２つの値が一致することを仮定する。

このとき、$a_k + b_k + c_k = 1$ だから

$a_{k+1} = \frac{1}{2}(c_k + a_k) = \frac{1}{2}(1 - b_k)$

$b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k) = \frac{1}{2}(1 - c_k)$

$c_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k + c_k) = \frac{1}{2}(1 - a_k)$　　である。

すると、$a_k = b_k$ のとき、$c_{k+1} = a_{k+1}$

$b_k = c_k$ のとき、$a_{k+1} = b_{k+1}$

$c_k = a_k$ のとき、$b_{k+1} = c_{k+1}$　となり、

$a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ のうちいずれか２つの値が一致する。

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より、すべての正の整数 n について、成り立つことが証明された。

(4) 一致する２つの値の組合せに関わらず、

$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n)$ が成り立つ。

(1) から $p_1 = \frac{1}{2}$　であり、$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$

だから、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は、初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となる。

したがって、$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

確率を具体的に求めさせる問題が多く、漸化式も自然と組み立てやすい。数学的帰納法を用いる場面もあり、入試問題として良問である。

(2) さいころ

2013 年横浜国立大学前期試験（理系 / 文系）

１つの整数を表示する装置がある。最初に 2013 が表示されている。さいころを１回投げるたびに次の操作（＊）を行う。

（＊）表示されている整数をさいころの出た目の数で割った余り r を求め、装置に r を表示させる。

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が０である確率を a_n ，１である確率を b_n, ３である確率を c_n とする。

(1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。

(2) a_n, b_n, c_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ を用いて表せ。

(3) a_n, b_n, c_n を n の式で表せ。

解答

(1) さいころは１～６の目がある。

2013 ÷ 1 は余り０　2013 ÷２ は余り１

2013 ÷ 3 は余り０　2013 ÷４ は余り１

2013 ÷ 5 は余り３　2013 ÷６ は余り３

つまり、１と３で割ったとき余りが０なので、

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

２と４で割ったとき余りが１なので、$b_1 = \frac{1}{3}$

５と６で割ったとき余りが３なので、$c_1 = \frac{1}{3}$

(2) ０は１～６のどの数で割ったとしても、余りは０である。

１について、１÷１ は余り０であるが、２～６のどの数で割ったとしても余りは１のままである。

３について、３を１または３で割ると余りは０、２で割ると余りは１、４～６で割ると余りは３のままである。

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が０である確率 a_n を漸化式で表す。

ⅰ）さいころを $n-1$ 回投げて余りが０になるならば、n 回目にどの目が出ても余りは０のままである。

確率は a_{n-1}

ⅱ）さいころを $n-1$ 回投げて余りが１になるならば、n 回目は１の目が出ればよいので、

確率は $b_{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

ⅲ）さいころを $n-1$ 回投げて余りが３になるならば、n 回目は１または３の目が出ればよいので、

確率は、$c_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$

したがって、ⅰ）～ⅲ）より

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}$$

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が１である確率 b_n を漸化式で表す。

ⅰ）さいころを $n-1$ 回投げて余りが１になるならば、n 回目は２～６の目が出ればよいので、

確率は $b_{n-1} \cdot \frac{5}{6}$

ⅱ）さいころを $n-1$ 回投げて余りが３になるならば、n 回目は２の目が出ればよいので、

確率は $c_{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

したがって、ⅰ）ⅱ）から

$$b_n = \frac{5}{6}b_{n-1} + \frac{1}{6}c_{n-1} \quad \cdots ①$$

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が３である確率 c_n を漸化式で表す。

さいころを $n-1$ 回投げて余りが３になるならば、n 回目は４～６の目が出るときだけであるから、

$$c_n = c_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}c_{n-1}$$

(3) $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_n = \frac{1}{2}c_{n-1}$ から数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

よって、$c_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

この結果を①に代入すると、

$$b_n = \frac{5}{6}b_{n-1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$b_n = \frac{5}{6}b_{n-1} + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで、両辺を 2^n 倍すると、

$2^n \cdot b_n = \frac{5}{3}\cdot 2^{n-1}\cdot b_{n-1} + \frac{2}{9}$　となる。

$2^n \cdot b_n = d_n$ とおくと、$d_1 = 2b_1 = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、

$$d_n = \frac{5}{3}d_{n-1} + \frac{2}{9}$$

すなわち、$d_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}(d_{n-1} + \frac{1}{3})$ となり

数列 $\left\{d_n+\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $d_1+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ 、公比 $\frac{5}{3}$ の等比数列であるから、

$d_n+\frac{1}{3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

よって、$d_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}$

元に戻すと、$2^n\cdot b_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}$ だから

$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

さらに、余りは０、１、３のいずれかであるから、$a_n+b_n+c_n=1$ となり、

$$\begin{aligned}a_n&=1-b_n-c_n\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

整数の剰余とさいころに関する２つの話題が登場し、読解力が試される。このようなレベルの問題に関して、生徒の答案を眺めていると、題意がつかめていないケースが見受けられる。さいころの出る目によって、確率と漸化式が立式できるのであるが... マニュアル的な問題を解くことに満足してしまう生徒ほど、読解力と数学的な思考力が試される問題に対応できていない。状況を正確に把握するため、具体的にさいころを１回もしくは２回投げたときを考えてみると、おおよその見当が付いてくる。正式な答案を作成する前段階の地道な作業を怠っている生徒が近年増えているように思えて、残念でならない。センター試験後の問題演習などで、具体的に書き出して感覚を養うことの大切さも踏まえて、じっくりと考えさせる機会を確保したいものである。

また、多くの漸化式の問題が等比数列型に持ち込むパターン〔$a_{n+1}=pa_n+q$〕 であるが、この問題は指数と項数をそろえるパターン〔$a_{n+1}=pa_n+q^n$〕も出題されており、漸化式の解法をすべてマスターしておかなければならない。２年生までに漸化式の解法をマスターしている生徒にとっては、確率と漸化式の理解を深め、数学的な思考力を高めていく過程で、良問と言える。

(3)図形

2014 年京都大学前期試験（理系）

２つの粒子が時刻０において△ＡＢＣ の頂点Ａに位置している。これらの粒子は独立に運動し、それぞれ１秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。例えば、ある時刻で点Ｃにいる粒子は、その１秒後には点Ａまたは点Ｂにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。この２つの粒子が、時刻０の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

解答

２つの粒子をそれぞれＰ、Ｑとする。
粒子Ｐが n 秒後に頂点Ａにいる確率を a_n ，頂点Ｂにいる確率を b_n ，頂点Ｃにいる確率を c_n とする。

最初に１秒後の粒子Ｐの位置について、考察する。

1 秒後に点Ａにいる確率 a_1

時刻０のとき、粒子Ｐは頂点Ａにあり、１秒後には必ずＢまたはＣに移動しているので、$a_1=0$

1 秒後に点Ｂにいる確率 b_1

１秒後には必ずＢまたはＣのどちらかに移動しており、移動する確率はそれぞれ等しいから $b_1=\frac{1}{2}$

1 秒後に点Ｃにいる確率 c_1

同様にして、 $c_1=\frac{1}{2}$

次に、粒子Ｐの漸化式について考える。

$n+1$ 秒後に点Ａにいる確率 a_{n+1}

ｉ）n 秒後に粒子Ｐが点Ｂにいるとき、$\frac{1}{2}$ の確率で点Ａに移動するから、$b_n\cdot\frac{1}{2}$

ⅱ）n 秒後に粒子Ｐが点Ｃにいるとき、$\frac{1}{2}$ の確率で点Ａに移動するから、$c_n\cdot\frac{1}{2}$

したがって、ｉ）ⅱ）から、

$a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$

$n+1$ 秒後に点Ｂにいる確率 b_{n+1} も同様にして、

$b_{n+1}=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}a_n$

$n+1$ 秒後に点Ｃにいる確率 c_{n+1} も同様にして、

$c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$

ここで、n 秒後には粒子Ｐは点Ａ、Ｂ、Ｃのいずれかにあるから、$a_n+b_n+c_n=1$ である。
すると、n 秒後に粒子Ｐが点Ａにいる確率 a_n は、

$a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-a_n)$ となり、

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は、初項 $a_1-\frac{1}{3}=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

また、n 秒後に粒子Ｐが点Ｂにいる確率 b_n は、

$b_{n+1}=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2}(c_n+a_n)=\frac{1}{2}(1-b_n)$ となり、

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$ は、初項 $b_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

n 秒後に粒子Ｐが点Ｃにいる確率 c_n も全く同様にして、

$$c_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

粒子Ｑも粒子Ｐと同じ条件で動くので、n 秒後に頂点Ａ、Ｂ、Ｃ にいる確率は、それぞれa_n, b_n, c_n と等しい。

よって、２つの粒子ＰとＱが同じ頂点にいる確率 p(n) は、$p(n)=a_n^2+b_n^2+c_n^2$

$$=\left\{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}^2+2\left\{\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

2014 年度の京都大理系学部前期試験は、大問が６題出題された。この問題は配点率が 15% であり、確率と漸化式の演習を重ねていれば、十分に満点が狙える問題である。しかし、確率に苦手意識のある生徒にとっては、２つの粒子ＰとＱが同じ頂点にある確率を独立試行として捉えることができず、関連させて考えようとした結果、戸惑ってしまう厳しさもあったのかもしれない。

漸化式自体は、等比数列型に持ち込むパターン〔$a_{n+1}=pa_n+q$〕で素直な問題である。また、図形としての対称性から確率 b_n と c_n は同値になり、計算の手間が省けて、授業で実践しやすい穏やかな問題である。

ただし、指数や対数の計算を苦手とする生徒が少しずつ増えているのが気掛かりである。この問題の最後に確率 p(n) を計算する場面がある。$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ であるが、$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$と間違って誤答になる場合と

$$\left\{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}^2+2\left\{\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

について、展開するときに計算を誤ってしまうケースも考えられる。論理的な思考力に加えて、確かな計算力も大学側は要求している。

６　おわりに

確率と場合の数の諸問題は、具体的にいくらか書き出してから考察する方が理解しやすく、一般化する際にも容易に対応できることがある。最近の理系の生徒を見ていると、このような作業を軽視してしまいがちで、少しでも省エネ化して解答しようとする雰囲気が漂う。逆に型にはまらない数学が得意な文系生徒の方が、かえって高得点につながるケースもあり、柔軟な発想力と具体的に書き残していくことの大切さを伝えていかなければならないと感じている。

難関大学を目指すのであれば、やはり２年生の時点で漸化式はすべてのパターンをマスターしておかなければならない。確率と漸化式は苦手意識を持っている生徒が多いのは確かであるが、どの問題も規則性を把握した上で方針を定めてしまえば、あとの作業は同じである。

指導上の細かい工夫を凝らすと同時に、最新の入試情報を分析した上で、日々の授業や演習を積み重ねることにより、確率と漸化式は得点源になることを生徒に伝え、高い目標に向けて粘り強く学習させていきたい。

【参考文献】

数学Ｂ（数研出版）

新課程　教科書傍用　サクシード数学Ⅱ＋Ｂ(数研出版）

2015 年度受験用　全国大学入試問題正解　数学［国公立大編］(旺文社）

2014 年度受験用　全国大学入試問題正解　数学［国公立大編］(旺文社）

2013 年度受験用　全国大学入試問題正解　数学［国公立大編］(旺文社）

2012 年度受験用　全国大学入試問題正解　数学［国公立大編］(旺文社）