国公立大学入試問題の研究
－整数問題の研究－

愛媛県立松山東高等学校　　松浦　　正

1　はじめに

整数問題は一種の総合問題であり，方程式・不等式，論理と集合，2項定理，数列，数学的帰納法など，さまざまな分野の知識を総合的に扱うため，公式一辺倒では解けない問題が多い。そのため，暗記中心の学習スタイルの生徒にとってはとても苦労する単元である。このような特性から、受験生の総合的な思考力，論証力の有無を判断するための問題として，整数を採用する大学も少なくない。

本研究では，昨年の大学入試問題を中心に出題内容ごとに分類し，解法の分析を行うことで整数の単元における体系的な学習指導に役立てていきたいと思い，この研究テーマを設定した。

2　大学入試問題の分析

『不定方程式に関する問題』

＜２０１９　福島大学　人文社会学群＞
$297x+139y=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を1組求めよ。

【解法の分析】ユークリッドの互除法により，297 と 139 の最大公約数を求める計算式を利用して，1組の特殊解を求める。
$297=139\cdot 2+19$，$139=19\cdot 7+6$，$19=6\cdot 3+1$　から
$297\cdot(22)+139\cdot(-47)=1$ を導き出す。

＜２０１９　福島大学　理工学群＞
(1)　6 で割ると 1 余るような 3 桁の自然数のうち，最大のものを求めよ。
(2)　6 で割ると 1 余り，11 で割ると 5 余るような 3 桁の自然数のうち，最大のものを求めよ。
(3)　6 で割ると 4 余り，11 で割ると 9 余り，7 で割ると 5 余るような 3 桁の自然数のうち，最大のものを求めよ。

【解法の分析】
(1)　6 で割ると 1 余る整数は $6m+1$（ m は整数）と表せ，
$6m+1\leqq 999$ を解くと，$m\leqq\dfrac{499}{3}=166.33\cdots$ となるので，
求める最大の自然数は，$6\cdot 166+1=997$ となる。
(2)　6 で割ると 1 余る整数は $6m+1$（ m は整数），11 で割ると 5 余る整数は $11n+5$（ n は整数）と表せるので，
$6m+1=11n+5$ から，$6m-11n=4$
この 1 次不定方程式を解いて，
$m=11k+8$，$n=6k+4$（ k は整数 ）
ゆえに，$6(11k+8)+1\leqq 999$ を解いて，$k\leqq\dfrac{475}{33}=14.33\cdots$
よって，求める自然数は，$66\cdot 14+49=973$
(3)　条件より，$6p+4=11q+9=7r+5$（$p,\ q,\ r$ は整数）
$6p+4=11q+9$ の解が，$p=11l+10$，$q=6l+5$（l は整数）
次に，$6(11l+10)+4=7r+5$ を解くと，
$l=7j-1$，$r=66j-1$（j は整数）
ゆえに，$7(66j-1)+5\leqq 999$ を解いて，$j\leqq\dfrac{13}{6}=2.16\cdots$
よって，求める自然数は，$462\cdot 2-2=922$

＜発展類題　２０１８　東京工業大　＞
(1)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を 1 組求めよ。
(2)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ。

(1)　$35x+91y+65z=3$　…… ①
① を変形すると，　$7(5x+13y)+65z=3$
$5x+13y=n$ とおくと，　$7n+65z=3$　…… ②
$n=19$，$z=-2$ は，② の整数解の 1 つである。
このとき，　$5x+13y=19$
$x=-4$，$y=3$ は，この方程式の整数解の 1 つである。
よって，$(x,\ y,\ z)=(-4,\ 3,\ -2)$ は ① を満たす整数の組の 1 つである。
(2)　(1) から $n=19$，$z=-2$ のとき方程式 ② は
$7\cdot 19+65\cdot(-2)=3$　…… ③
②－③ から，　$7(n-19)+65(z+2)=0$
7 と 65 は互いに素であるから，整数 k を用いて
$n=65k+19$，$z=-7k-2$　…… ④　と表せる。
このとき，　$5x+13y=65k+19$
(1) より，　$5\cdot(-4)+13\cdot 3=19$
したがって，$5(x+4)+13(y-3)=65k$
よって，　$5(x+4-13k)+13(y-3)=0$
5 と 13 は互いに素であるから，整数 l を用いて
$x+4-13k=13l$，$y-3=-5l$　と表せる。
したがって，　$x=13(k+l)-4$，$y=-5l+3$
ゆえに，　$x^2+y^2=\{13(k+l)-4\}^2+(-5l+3)^2$
ここで，$k+l$，l は整数であるから，
$\{13(k+l)-4\}^2$ と $(-5l+3)^2$ をそれぞれ最小にする $k+l$，l の値は $k+l=0$，$l=1$　　すなわち，　$k=-1$，$l=1$
このとき，$x=-4$，$y=-2$ となり，
x^2+y^2 は最小値 $(-4)^2+(-2)^2=20$ をとる。
また，$k=-1$ のとき ④ から，　$z=5$
したがって，$(x,\ y,\ z)=(-4,\ -2,\ 5)$ のとき x^2+y^2 は最小値 20 をとる。

＜２０１９　長崎大学　経済・水産・教育・環境＞
等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

【解法の分析】因数分解を利用して解の絞り込みを行う。
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}\iff 2xy-3x-3y=0\iff(2x-3)(2y-3)=9$
条件を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は，
$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)$

＜２０１９　富山大学　人間発達科学・経済＞
整式 $P(x,\ y,\ z)=xyz-3xy-2xz-yz+6x+3y+2z-6$ を考える。
(1)　$P(x,\ y,\ z)$ を因数分解せよ。
(2)　$P(0,\ y,\ z)=1$ を満たす整数の組 $(y,\ z)$ をすべて求めよ。
(3)　$xyz-3xy-2xz-yz+6x+3y+2z-7=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ。

【解法の分析】因数分解を利用して解の絞り込みを行う。
(1)　$P(x,\ y,\ z)=(x-1)(y-2)(z-3)\cdots$ ①
(2)　① より，$(y-2)(z-3)=-1$
$y,\ z$ は整数なので，$(y-2,\ z-3)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$
ゆえに，$(y,\ z)=(3,\ 2),\ (1,\ 4)$
(3)　$xyz-3xy-2xz-yz+6x+3y+2z-7=0$
$\iff P(x,\ y,\ z)-1=0\iff P(x,\ y,\ z)=1$
つまり，$(x-1)(y-2)(z-3)=1$
$x,\ y,\ z$ は自然数なので，
$x-1\geqq 0$，$y-2\geqq -1$，$z-3\geqq -2$
よって，$(x-1,\ y-2,\ z-3)=(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ -1,\ -1)$
ゆえに，$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 1,\ 2)$

＜応用類題　２０１８　福島大学　　＞
和の絶対値と積の絶対値が等しくなる 2 つの整数の組をすべて求めよ。

題意を満たす 2 つの整数を p, q とする。
条件から，　$|p+q|=|pq|$　　よって，　$pq=\pm(p+q)$
[1]　$pq=p+q$ のとき
$pq-p-q=0$ から，　$(p-1)(q-1)=1$
ここで，$p-1$，$q-1$ は整数である。
よって，　$(p-1,\ q-1)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$
ゆえに，　$(p,\ q)=(2,\ 2),\ (0,\ 0)$
[2]　$pq=-(p+q)$ のとき
$pq+p+q=0$ から，　$(p+1)(q+1)=1$
ここで，$p+1$，$q+1$ は整数である。
よって，　$(p+1,\ q+1)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$
ゆえに，　$(p,\ q)=(0,\ 0),\ (-2,\ -2)$
[1]，[2] から，　$(p,\ q)=(0,\ 0),\ (2,\ 2),\ (-2,\ -2)$

＜応用類題　２０１８　東北大学　　＞
整数 a，b は等式 $3^a-2^b=1$ …… ① を満たしているとする。
(1)　a，b はともに正となることを示せ。
(2)　$b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。
(3)　① を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。

(1)　$3^a=2^b+1$，$2^b>0$ より，　$3^a>1$　　よって，$a>0$
ゆえに，$a\geqq1$ から，　$2^b=3^a-1\geqq3^1-1=2>1$　　　よって，$b>0$
したがって，a，b はともに正となる。
(2)　3^1 を 4 で割った余りは 3 であり，3^2 を 4 で割った余りは 1 であるから，3^n を 4 で割った余りは，3，1 を繰り返す。
すなわち，n が奇数のときは 3 であり，偶数のときは 1 となる。
また，$b>1$ のとき 2^b は 4 の倍数である。
よって，$3^a=2^b+1$ を 4 で割った余りは 1 となる。
したがって，$b>1$ ならば a は偶数である。
(3)　[1]　$b=1$ のとき
$3^a-2^1=1$ から　$3^a=3$　　よって，　$a=1$
[2]　$b>1$ のとき
(2) より，a は自然数 n を用いて，$a=2n$ と表せる。
このとき，　$3^{2n}-2^b=1$
したがって，　$(3^n+1)(3^n-1)=2^b$　…… ＊
2 は素数であるから，　$3^n+1=2^x$　…… ②
$3^n-1=2^y$　…… ③
と表せる。ただし，x，y は 0 以上の整数で，$x+y=b$，$x>y$ を満たす。
②＋③ より　　$2\cdot3^n=2^x+2^y$　　　よって，　$3^n=2^{x-1}+2^{y-1}$
3^n は奇数，$2^{x-1}>2^{y-1}$ から，$2^{y-1}=1$　よって，$y=1$
このとき ③ から　$n=1$　　したがって，　$a=2$
① から，$3^2-2^b=1$　　よって，　$2^b=8$
したがって，　$b=3$
[1]，[2] から　　$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)$

＊から $n=1$ を求めるまでの別解

$n>0$ より 3^n+1，3^n-1 はともに偶数であり，
$(3^n+1)-(3^n-1)=2$ であるから，3^n+1 と 3^n-1 の最大公約数は 2 である。
また，3^n+1，3^n-1 はともに 2^x (x は 0 以上の整数) の形で表せる。
以上のことから，　$3^n-1=2$　　よって，　$3^n=3$
したがって，　$n=1$

『約数・倍数に関する問題』

＜２０１９　徳島大学　理工・医＞
自然数 n に対し，　$f(n)=n^2(n^2+8)$ と定める。
(1)　$f(4)$ の正の約数の個数を求めよ。
(2)　$f(n)$ は 3 の倍数であることを証明せよ。
(3)　$f(n)$ の相異なる素因数の個数が 2 個あり，かつ $f(n)$ の正の約数の個数が 10 個であるような n をすべて求めよ。

【解法の分析】
(1)　$f(4)=2^7\cdot3$ より，正の約数の個数は，　$8\times2=16$
(2)　k を整数として，$n=3k$ のとき，　$f(3k)=9k^2(9k^2+8)$
$n=3k\pm1$ のとき，$f(3k\pm1)=(3k\pm1)^2\{(3k\pm1)^2+8\}$
$=3(3k\pm1)^2(3k^2\pm2k+3)$
いずれも 3 の倍数となるので，すべての自然数 n に対して $f(n)$ は 3 の倍数である。
(3)　条件から，異なる素数 p，q を用いて，
$f(n)=p^kq^l$ (k，l は，$k\leqq l$ をを満たす自然数)，かつ，
$(k+1)(l+1)=10$ と表せる。
これより，　$2\leqq k+1\leqq l+1$ から，　$k+1=2$，　$l+1=5$
ゆえに，　$k=1$，$l=4$ となり，　$f(n)=pq^4$ となる。
(2) より，　p または q は 3 の倍数である。 n^2 は平方数，および $n^2+8\geqq9$ である。
［ｉ］　$p=3$ のとき，$n^2(n^2+8)=3q^4$ だから，
$(n^2,\ n^2+8)=(1,\ 3q^4)$，　$(q^2,\ 3q^2)$
これを解くと，　$q=2$，　$n=2$
［ⅱ］　$q=3$ のとき，$n^2(n^2+8)=p\cdot3^4$ だから，
$(n^2,\ n^2+8)=(1,\ p\cdot3^4)$，　$(3^4,\ p)$
これを解くと，　$p=89$，　$n=9$
以上より，　$n=2$，9

＜２０１９　千葉大学　国際教養・理・医・薬・工＞
正の約数の個数ちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。
(1)　d_5 を求めよ。
(2)　d_{15} を求めよ。

【解法の分析】
(1)　正の整数 ${p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\cdots{p_n}^{a_n}$ の正の約数の個数は，
$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$ である。
(p_1，p_2，…，p_n は互いに異なる素数，a_1，a_2，…，a_n は自然数)
よって，p を素数とすると正の約数の個数がちょうど 5 個となる自然数は，　p^4 である。ゆえに，$d_5=7^4=2401$
(2)　正の約数の個数がちょうど 15 個となる自然数は，次の場合がある。
［ｉ］　p^{14} (p は素数) と表されるとき
1900 以上で最小のものは，　$2^{14}=16384$
［ⅱ］　q^2r^4 (q，r は異なる素数) と表されるとき
最小のものは，$q>r$ なので，　$11^2\cdot2^4=1936$

＜２０１９　琉球大学　工・理・医・農・教育＞
任意の自然数 n に対して，　n^5-n は 30 で割り切れることを示せ。

【解法の分析】 n^5-n を因数分解すると，
$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$
$(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積なので，6 の倍数である。
5 を法として考えると，
$n\equiv1$ のとき，　$n-1\equiv0$　　　$n\equiv2$ のとき，　$n^2+1\equiv0$
$n\equiv3$ のとき，　$n^2+1\equiv0$　　　$n\equiv4$ のとき，　$n+1\equiv0$

よって，いずれの場合も $n^5-n\equiv0$ となるので， n^5-n は5の倍数である。
ゆえに， 6と5は互いに素なので， n^5-n は30で割り切れる。

＜２０１９　信州大学　経法・工・理・医＞
(1)　2^n-1 が3で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。
(2)　n^n-1 が3で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

【解法の分析】

(1)　自然数 n に対して， $2^n\equiv(-1)^n\equiv\begin{cases}1 & (n\text{ が偶数})\\ -1 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$

であるから， 2^n-1 が3で割り切れる自然数 n は，

$n=2k$ (k は正の整数)

(2)　$n\equiv0$ のとき， $n^n\equiv0$　　$n\equiv1$ のとき， $n^n\equiv1$

$n\equiv2$ のとき，(1)で確認済みなので， $n\equiv2\pmod 3$ で，かつ偶数となる n は， $n=3\cdot2k+2$ (k は0以上の整数) と表される自然数である。
よって，求める自然数は，3で割って1余るもの，または6で割って2余るものである。
つまり，0以上の整数 k を用いて，

$n=6k+1$，$6k+2$，$6k+4$

＜２０１９　島根大学　＞
(1)　n が3で割って1余る自然数であるとき，$1+n+n^2$ は3の倍数であることを示せ。
(2)　すべての自然数 n に対し，$n(n+1)(1+n+n^2)$ は3の倍数であることを示せ。
(3)　すべての自然数 n，k に対し，
$n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots\cdots+n^{k+1})$ は
$k+2$ の倍数であることを示せ。

【解法の分析】

(1)　省略　　　(2)　省略

(3)　n は，整数 m を用いて，

$n=(k+2)m$，$(k+2)m+1$，……，$(k+2)m+(k+1)$ のいずれかで表せる。

[1]　$n\neq(k+2)m+1$ のとき

n，$n+1$，……，$n+k$ のいずれかは $k+2$ の倍数であるから，

$n(n+1)\cdots\cdots(n+k)(1+n+\cdots\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$ の倍数である。

[2]　$n=(k+2)m+1$ のとき

n^i (i は整数) を $k+2$ で割った余りは $1^i=1$ となるから，

$1+n+n^2+\cdots\cdots+n^{k+1}$ を $k+2$ で割った余りは，

$1+1+1+\cdots\cdots+1=k+2$ を $k+2$ で割った余りに等しい。

よって，$1+n+n^2+\cdots\cdots+n^{k+1}$ は $k+2$ の倍数となる。

よって，$n(n+1)\cdots\cdots(n+k)(1+n+\cdots\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$ の倍数である。

[1]，[2]から，すべての自然数 n，k に対し，
$n(n+1)\cdots\cdots(n+k)(1+n+\cdots\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$ の倍数である。

[2]の別解

[2]　$n=(k+2)m+1$ のとき

2つの整数 a，b について，$a-b$ が $k+2$ の倍数であるとき，　$a\equiv b\pmod{k+2}$ とかく。

$n\equiv1\pmod{k+2}$ より

$$1+n+n^2+\cdots\cdots+n^{k+1}\equiv1+1+1^2+\cdots\cdots+1^{k+1}$$
$$\equiv k+2\equiv0\pmod{k+2}$$

したがって，$1+n+n^2+\cdots\cdots+n^{k+1}$ は $k+2$ の倍数であるから，
$n(n+1)\cdots\cdots(n+k)(1+n+\cdots\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$ の倍数である。
[1]，[2]から，すべての自然数 n，k に対し，
$n(n+1)\cdots\cdots(n+k)(1+n+\cdots\cdots+n^{k+1})$ は $k+2$ の倍数である。

＜　応用類題　２０１９　東京大学　理科＞
n を1以上の整数とする。
(1)　n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。
(2)　$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の2乗にならないことを示せ。

【解法の分析】

(1)　$5n^2+9=(n^2+1)\cdot5+4$ であるから，互除法の原理により，$n\geqq2$ のとき，

$\gcd(5n^2+9,\ n^2+1)=\gcd(n^2+1,\ 4)$

［ｉ］　n が奇数のとき

$n^2+1\equiv0\pmod 2$，$n^2+1\not\equiv0\pmod 4$

$\therefore\ \gcd(n^2+1,\ 4)=2$　（$n=1$ でも成立）

［ii］　n が偶数のとき，　$n^2+1\not\equiv0\pmod 2$

$\therefore\ \gcd(n^2+1,\ 4)=1$

以上より，　$d_n=\begin{cases}2 & (n\text{ が奇数のとき})\\ 1 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$

(2)　［ｉ］　n が奇数のとき，(1)の考察より，

$n^2+1=2p$，　$5n^2+9=2q$

（p，q は互いに素，$p>1$，$q>1$）とおける。

したがって，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の2乗となるためには，$p=k^2$，$q=l^2$ (k，l は互いに素な整数) となることが必要。すなわち，

$n^2+1=2k^2$，　$5n^2+9=2l^2$

n^2 を消去すると，　$5(2k^2-1)+9=2l^2$

$\therefore\ 5k^2+2=l^2$

$\therefore\ l^2\equiv2\pmod 5$

ところが，l を整数とすると，　$l^2\equiv0,\ 1,\ 4\pmod 5$

であるから，これは不合理である。

よって，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の2乗にならない。

［ii］　n が偶数のとき，(1)の考察より，n^2+1 と $5n^2+9$ は互いに素であるから，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の2乗となるためには，$n^2+1=k^2$，$5n^2+9=l^2$ (k，l は互いに素な整数) となることが必要。ところが，$n^2<n^2+1<(n+1)^2$ であるから，
$n^2+1=k^2$ となる整数 k は存在しない。

よって，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の2乗にならない。

以上(1)，(2)より題意は示された。

『素数に関する問題』

＜２０１９　大阪府立大学　現代システム科学＞
(1)　自然数 n で，n^2-1 が素数になるものをすべて求めよ。
(2)　$0\leqq n\leqq m$ を満たす整数 m，n の組 $(m,\ n)$ で，
$3m^2+mn-2n^2$ が素数になるものをすべて求めよ。
(3)　0以上の整数 m，n の組 $(m,\ n)$ で，
$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ が素数になるものをすべて求めよ。

【解法の分析】

(1)　$n^2-1=(n+1)(n-1)$

n^2-1 が素数になるとき，　$n-1=1$　　$\therefore\ n=2$

(2)　$P=3m^2+mn-2n^2$ とおく。

$P=(m+n)(3m-2n)$　　$0\leqq n\leqq m$ から，　$m+n\geqq0$

P が素数になるとき，$m+n=1$ または $3m-2n=1$

［ｉ］　$m+n=1$ のとき，$(m,\ n)=(1,\ 0)$

このとき，$P=3$ となり適する。

［ii］　$3m-2n=1$ のとき，　$2n=3m-1$

$0\leqq2n\leqq2m$ に代入すると，　$0\leqq3m-1\leqq2m$

これより，　$\dfrac{1}{3}\leqq m\leqq1$

よって，$(m,\ n)=(1,\ 1)$

　このとき，$P=2$ となり適する。
以上から，$(m,\ n)=(1,\ 0),\ (1,\ 1)$
(3)　$Q=m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ とおく。
Q を因数分解すると，$Q=(m^2+n^2+2)(m^2-4n^2-8)$
$m^2+n^2+2\geqq 2$ だから，Q が素数になるとき，
$m^2-4n^2-8=1$ となることが必要になる。
よって，$m^2-4n^2-9=0$
　$(m+2n)(m-2n)=9$
$m+2n\geqq 0$，$m+2n\geqq m-2n$ より，
$(m+2n,\ m-2n)=(9,\ 1)$ または $(3,\ 3)$
これを解くと，$(m,\ n)=(5,\ 2),\ (3,\ 0)$
ともに Q が素数となり，条件を満たす。

＜２０１９　京都大学　理系＞
　$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

【解法の分析】$f(x)=x^3+2x^2+2=x^3+2(x^2+1)$
$f(x)$の偶奇は x^3 の偶奇，すなわち x の偶奇と一致する。
n と $n+1$ の偶奇は異なるので，$f(n)$ と $f(n+1)$ の偶奇も異なる。ゆえに，$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となるのは，$|f(n)|=2$ または $|f(n+1)|=2$ のときに限る。
［ｉ］$f(n)=2$ のとき
　$n^3+2n^2+2=2 \Leftrightarrow n^2(n+2)=0$　$\therefore n=-2,\ 0$
［ⅱ］$f(n)=-2$ のとき
　$n^3+2n^2+2=-2 \Leftrightarrow -n^2(n+2)=4$　解なし
［ⅲ］$f(n+1)=2$ のとき
　［ｉ］と同様にして，$n+1=-2,\ 0$　$\therefore n=-3,\ -1$
［ⅳ］$f(n+1)=2$ のとき
　［ⅱ］と同様にして，解なし
よって，$n=-3,\ -2,\ -1,\ 0$

＜　類題　２０１８　京都大学　理系＞
n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

【解法の分析】
$n^3-7n+9=(n^3-n)-6n+9$
$\qquad=(n-1)n(n+1)+3(-2n+3)$
$(n-1)n(n+1)$ は連続する３整数の積であるから，３の倍数である。
よって，$(n-1)n(n+1)=3k$ (k は整数) とおくと
$n^3-7n+9=3k+3(-2n+3)$
$\qquad=3(k-2n+3)$
$k-2n+3$ は整数なので，n^3-7n+9 は３の倍数である。
よって，n^3-7n+9 が素数となるとき，その値は３である。
ゆえに，　$n^3-7n+9=3$
すなわち，　$n^3-7n+6=0$
よって，$(n-1)(n-2)(n+3)=0$
したがって，　$n=-3,\ 1,\ 2$

＜　発展類題　２０１８　東北大学　＞
　正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ が次の式を満たすとする。
　$a^2+b^2=c^2$
(1)　a，b，c のうち少なくとも１つは偶数であることを示せ。
(2)　a，b，c のうちに素数ではないものがあることを示せ。

【解法の分析】
(1)　$a^2+b^2=c^2$　…… ①
a，b，c がすべて奇数であると仮定すると，a^2，b^2，c^2 はすべて奇数である。
このとき，① の左辺は偶数，右辺は奇数となり矛盾する。
よって，a，b，c のうち少なくとも１つは偶数である。
(2)　a，b，c がすべて素数であると仮定する。
このとき，(1) より a，b，c のうち少なくとも１つは偶数であるから，a，b，c のうち少なくとも１つは２である。
[1]　$a=2$ または $b=2$ のとき
　$b=2$ としても一般性は失われない。
　このとき，① から　$a^2+4=c^2$
　よって，　$(c+a)(c-a)=4$　…… ②
　a，c は正の整数であるから，　$c+a>c-a$
　このことと，$c+a$ と $c-a$ の偶奇は一致することから，
　② を満たす正の整数 a，c は存在しない。
[2]　$c=2$ のとき
　このとき，① から $a^2+b^2=4$ となり，これを満たす正の整数 a，b は存在しない。
[1]，[2] から，a，b，c がすべて素数であり，かつ ① を満たすものは存在しない。
　よって，a，b，c のうちに素数ではないものがある。
別解　a，b，c がすべて素数であると仮定する。
① から，　$a^2=c^2-b^2$　よって，　$a^2=(c+b)(c-b)$
b，c は正の整数であるから，$c+b$，$c-b$ は整数である。
$c+b>c-b$ と，a が素数であることに注意すると，$c-b=1$
b，c は差が１の素数であるから，　$b=2$，$c=3$
このとき　$a^2=3^2-2^2=5$
これは a が整数であることに矛盾する。
よって，a，b，c のうちに素数ではないものがある。

『記数法に関する問題』

＜２０１９　福島大学　理工学群＞
七進法で表された次の数の計算の結果を七進法で表せ。
　$14520_{(7)}\div 110_{(7)}$

【解法の分析】筆算で計算すると，
　$14520_{(7)}\div 110_{(7)}=132_{(7)}$

＜２０１９　名古屋大学　理・工・農・医・情報＞
正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は正の整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第１位は０であり，第２位は０以外の数であるとする。
(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。
(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

【解法の分析】
(1)　$\sqrt{n}$ の整数部分を m とおくと，
　$m^2<n<(m+1)^2=m^2+2m+1$
したがって，n と m^2 の差 $d=n-m^2$ は，$1\leqq d\leqq 2m$ を満たす。$\sqrt{n}$ を 10 進法で表すと，$\dfrac{1}{100}\leqq\sqrt{n}-m<\dfrac{1}{10}$
$n=m^2+d$ より，これを変形すると，
$100m+1\leqq 100\sqrt{m^2+d}<100m+10$
$10000m^2+200m+1\leqq 10000(m^2+d)<10000m^2+2000m+100$
m の動ける範囲は，$\dfrac{100d-1}{20}<m\leqq\dfrac{10000d-1}{200}$ … ①
① において，$d=1$ とすると，$\dfrac{99}{20}<m\leqq\dfrac{9999}{200}$ であり，
これを満たす最小の自然数 m は５である。
ゆえに，求める最小の n は，$5^2+1=26$
(2)　① において，$d=1$ のとき，$5\leqq m\leqq 49$ であり，$d=2$のとき，

$\dfrac{199}{20}<m\leqq\dfrac{19999}{200}$ より，$10\leqq m\leqq 99$ である。

また，$d\geqq 3$ のとき，$\dfrac{199}{20}<m$ なので，$m\geqq 15$ であり，このときの n は，$n\geqq 15^2+3=228$ を満たす。

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$d=1$	26	37	50	65	82	101	122	145	170
$d=2$	×	×	×	×	×	102	123	146	171

上の表より，小さいものから順に並べたときに 10 番目にくる数は 145

『確率との融合問題』

＜２０１９　神戸大学　理・医・工・農・国際人間科学＞

n を 2 以上の整数とする。2 個のサイコロを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする。

(1)　P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2)　$n\geqq 36$ のとき，P_n を求めよ。

(3)　$P_n=\dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ。

【解法の分析】2 個のさいころを区別し，一方のさいころの出た目を X，他方のさいころの出た目を Y，$Z=XY$　とする。

(1)　$Z\equiv 1 \pmod 2$ は，$\begin{cases} X\equiv 1 \pmod 2 \\ Y\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$ と同値だから，

$P_2=\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{4}$

$Z\equiv 1 \pmod 3$ は，$\begin{cases} X\equiv 1 \pmod 3 \\ Y\equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$ または $\begin{cases} X\equiv 2 \pmod 3 \\ Y\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ と同値だから，

$P_3=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6}+\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{9}$

同様にして，$P_4=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$

(2)　$Z\leqq 36$ であるから，$n\geqq 36$ のとき，

$Z\equiv 1 \pmod n \Leftrightarrow Z=1 \Leftrightarrow X=Y=1$ が成立する。

よって，$P_n=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

(3)　(1), (2) より，$2\leqq n\leqq 4$，$n\geqq 36$ のとき，$P_n\fallingdotseq\dfrac{1}{18}$ であるから，

$5\leqq n\leqq 35$ の範囲で調べる。a，b を 1 以上 6 以下の整数とする。

$P_n=\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{36}$ は，$ab\equiv 1 \pmod n$ を満たす $(a,\ b)$ が $(1,\ 1)$ 以外に 1 個だけ存在すること，すなわち，

$a\fallingdotseq 1$ かつ $a^2\equiv 1 \pmod n$ を満たす a が 1 個だけ存在し，かつ $a\fallingdotseq b$ かつ $ab\equiv 1 \pmod n$ を満たす a，b が存在しないことと同値である。

まず，a^2-1 の約数となる整数 $n\ (5\leqq n\leqq 35)$ について，

$3^2-1=8$，$4^2-1=15=3\cdot 5$,

$5^2-1=24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$

$6^2-1=35=5\cdot 7$　となるので，

$n\fallingdotseq S=\{6,\ 7,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35\} \Longrightarrow P_n\fallingdotseq\dfrac{1}{18}$ が成立する。

次に，S に属し，かつ，$ab-1\ (a\fallingdotseq b)$ の約数となる整数 n について，

$2\cdot 3-1=5$，$2\cdot 4-1=7$，$2\cdot 5-1=9$，$2\cdot 6-1=11$

$3\cdot 4-1=11$，$3\cdot 5-1=14=2\cdot 7$，$3\cdot 6-1=17$,

$4\cdot 5-1=19$，$4\cdot 6-1=23$，$5\cdot 6-1=29$　となる。

以上から，$P_n=\dfrac{1}{18}$ となる n は，S に属する整数のうち 7 以外のもの，

すなわち，$n=6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35$

＜２０１８　岡山大学　理・医・工・農・環境理工＞

a，b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　x_6，x_7 を a，b を用いて表せ。

(2)　$x_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべての自然数になるような a，b の組をすべて求めよ。

【解法の分析】

(1)　$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$ に $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ を代入していくと，

$x_3=\dfrac{1+x_2}{x_1}=\dfrac{1+b}{a}$，

$x_4=\dfrac{1+x_3}{x_2}=\left(1+\dfrac{1+b}{a}\right)\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{1+a+b}{ab}$,

$x_5=\dfrac{1+x_4}{x_3}=\left(1+\dfrac{1+a+b}{ab}\right)\cdot\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{1+a}{b}$,

$x_6=\dfrac{1+x_5}{x_4}=\left(1+\dfrac{1+a}{b}\right)\cdot\dfrac{ab}{1+a+b}=a$，

$x_7=\dfrac{1+x_6}{x_5}=(1+a)\cdot\dfrac{b}{1+a}=b$

(2)　(1) より，数列 $\{x_n\}$ は周期が 5 の周期数列であるから，k を自然数として，

$$x_n=\begin{cases} a & (n=5k-4) \\ b & (n=5k-3) \\ \dfrac{1+b}{a} & (n=5k-2) \\ \dfrac{1+a+b}{ab} & (n=5k-1) \\ \dfrac{1+a}{b} & (n=5k) \end{cases}$$

x_n が自然数であるとき，

$\dfrac{1+b}{a}\geqq 1$　かつ　$\dfrac{1+a+b}{ab}\geqq 1$　かつ　$\dfrac{1+a}{b}\geqq 1$

が必要である。これらを整理すると，

$\begin{cases} 1+b\geqq a \cdots ① \\ 1+a\geqq b \cdots ② \\ 1+a+b\geqq ab \Leftrightarrow (a-1)(b-1)\leqq 2 \cdots ③ \end{cases}$

$a\geqq 4$ のとき，① から $b\geqq 3$ となり，③ を満たさない。

すなわち，$a=1,\ 2,\ 3$ に限る。

［ⅰ］　$a=1$ のとき，$0\leqq b\leqq 2$ となり，$b=1,\ 2$

このとき，x_n は自然数となる。

［ⅱ］　$a=2$ のとき，$1\leqq b\leqq 3$ となり，$b=1,\ 2,\ 3$

$b=1,\ 3$ のとき，x_n は自然数となる。

［ⅲ］　$a=3$ のとき，$2\leqq b\leqq 2$ となり，$b=2$

このとき，x_n は自然数となる。

よって，求める a，b の組は，

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$

『図形との融合問題』

＜２０１９　新潟大学　理・医・工・農・歯＞

半径がそれぞれ a，b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A，C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点B が再び C_a 上にくるときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m，n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

(1)　a，b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているかを，a，b を用いて表せ。

(2)　a，b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで，p，q は互いに素な自然数，s，t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p，q，s，t を用いて表せ。

(3)　a，b は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき，$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

【解法の分析】

(1)　C_a，C_b の円周の長さはそれぞれ，$2\pi a$，$2\pi b$ であり，回転後初めて B が A に一致するまでに 2 円の接点は，

$2\pi\times\dfrac{ab}{\gcd(a,\ b)}$ (a，b の最小公倍数) だけ移動する。

この間に円 C_b は $\dfrac{2\pi\times\dfrac{ab}{\gcd(a,\ b)}}{2\pi b}=\dfrac{a}{\gcd(a,\ b)}$ 周期回転する。

(2)　回転後，初めて B が A に一致するとき，それまでに接点が C_a の周上を m 周し，C_b は n 周期回転したとすると，

$2\pi a\times m=2\pi b\times n$

$\therefore\ \dfrac{p}{q}m=\dfrac{s}{t}n$

$\therefore\ (pt)m=(qs)n$

これを満たす最小の自然数 n は，$\dfrac{(\ pt,\ qs\ \text{の最小公倍数}\ )}{qs}$

つまり，$\dfrac{pt}{\gcd(pt,\ qs)}$

(3)　b，$2b$，$3b$，$\cdots$，ab を a で割ったときの余りをそれぞれ r_1，r_2，r_3，$\cdots$，r_a とする。($r_a=0$ である)

このとき，$\mathrm{A}_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ は，円周 C_a のはじめの Aの位置から $2\pi r_k$ だけずれた $\left(\text{中心角}\dfrac{2\pi r_k}{a}\right)$ 位置にある。

$\{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_a\}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a-1\}$ であることを証明すれば，$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ が C_a をちょうど a 等分することが示せたことになる。

r_1，r_2，$\cdots$，r_a は $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a-1$ のいずれかであり，もしも，この中に一致するものがあると仮定し，それを r_i，r_j $(0\leqq i<j\leqq a)$ とする。

このとき，$jb-ib$，つまり，$(j-i)b$ は a の倍数であるが，

$0<j-i\leqq a-1$，a，b は互いに素であるから矛盾が生じる。

したがって，$\{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_a\}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a-1\}$ であり，

$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することが示せた。

4　おわりに

① 因数分解や素因数分解を活用した解の範囲の絞り込み
② 約数，倍数，素数の性質や証明に関する内容
③ 剰余類の性質を利用

以上の 3 点の要素がほとんどの入試問題に含まれていた。整数を扱う数列・漸化式や確率などと融合され，受験生を苦しめる分野ではあるが，やはり，教科書で学習する基礎基本の徹底が大切であることを再確認できた。次の新学習指導要領では，数学 A において，整数の性質が大項目として扱われなくなるため，出題頻度や出題傾向にも変化が出てくる可能性もある。「大学入学共通テスト」を含めた今後の入試全体の動向にも注意をしながら，それぞれの単元ごとの入試問題研究を続けていきたい。

【参考文献】

2019 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）
2018 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）