中四国の国公立大学入試問題の研究
－ AO・推薦入試の問題から －

愛媛県立新居浜西高等学校　松本　　慎

1　はじめに

四国地区には，5 つの国立大学，4 つの公立大学が設置されている。中国地方には，5 つの国立大学，11 の公立大学が設置されている。国立大学では，約 22 %，公立大学では，約 32 %の生徒をAO・推薦入試により学生募集を行っており、昨年度と同程度の割合である。私たちが生徒に指導する際，過去問を解かし，その傾向を見つけることで対策を講じることができると思う。そのため，昨年度に引き続いて，中四国の国公立大学のAO・推薦入試問題で出題された数学の問題を取り上げた。

2　平成 31 年度四国の国公立大学 AO・推薦入試問題

高知大学　理工学部　数学物理学科（数学受験）推薦入試 I

$\boxed{1}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

微分を学んだことで，曲線の接線の方程式を求めることができるようになった。例えば，a を 0 でない実数とし，2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(p,\ f(p))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の方程式を p と a を用いて表すことができる。

二つの 2 次関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの両方に接する直線を，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線と呼ぶ。共通接線はいつも存在するのだろうか。存在するのであれば，何本あるのだろうか。いま，t は実数とし，a と s は 0 でない実数とする。二つの2 次関数 $f(x)=ax^2$ と $g(x)=(x-s)^2+t$ について，それらのグラフの共通接線を考えてみよう。

(1) <u>$a=1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと$y=g(x)$ のグラフの共通接線の方程式を s と t を用いて表してみると，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共通接線の本数はちょうど 1 本であることがわかる。</u>

$a\fallingdotseq 1$ のときも，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共通接線の本数は 1 本なのだろうか。このことを考えるために，$a=-1$ の場合を考えてみよう。

(2) <u>$a=-1$ のとき，$s=1$，$t=-2$ とすれば，$y=f(x)$ のグラフと$y=g(x)$ のグラフの共通接線は存在しない。同じく $a=-1$ のとき，$s=t=1$ とすれば，$y=f(x)$ のグラフと$y=g(x)$ のグラフの共通接線は 2 本ある。</u>(3) <u>$a=-1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと$y=g(x)$ のグラフの共通接線の本数は，s と t のすべての値に対しては，どうなるだろうか。</u>

今度は，s と t は実数とし，a と b は 0 でない実数とする。二つの 2 次関数 $f(x)$ と $g(x)$ をそれぞれ $f(x)=ax^2$, $g(x)=b(x-s)^2+t$ とおいてみよう。実は，(4) <u>一般の二つの 2 次関数に対して，それらのグラフの共通接線の本数を調べることは，$f(x)$ と $g(x)$ をこのようにおいた場合の共通接線の本数を調べることに帰着される。</u>

問 1．a を 0 でない実数とし，2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(p,\ f(p))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の方程式を p と a を用いて表せ。
問 2．下線部 (1) の理由を説明せよ。
問 3．下線部 (2) の理由を説明せよ。
問 4．下線部 (3) に関して，共通接線の本数と s，t の値の関係について考察せよ。結果だけでなく理由も明記すること。
問 5．下線部 (4) の理由を説明せよ。

$\boxed{2}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_{100},\ y_{100})$ を座標平面上の点とする。また，r_1，r_2，…，r_{100} を正の実数とする。1 以上 100 以下の整数 i，j に対して，領域 D_i の点で領域 D_j にも属するようなものがあるとき，$D_i \sim D_j$ と書くことにする。$i \fallingdotseq j$ のとき，$D_i \sim D_j$ が成り立つかどうかは $(x_i,\ y_i)$，$(x_j,\ y_j)$ と r_i，r_j の与え方による。

1 以上 100 以下のすべての整数 i に対して，$D_i \sim D_i$ が成り立つ。また，1 以上 100 以下のある整数 i，j に対して，$D_i \sim D_j$ が成り立っているとき，$D_j \sim D_i$ も成り立つ。一方，(1) <u>1 以上 100 以下のある整数 i，j，k に対して $D_i \sim D_j$ と $D_j \sim D_k$ が同時に成り立っていても，$D_i \sim D_k$ が成り立つとは限らない。</u>

1 以上 100 以下の整数 i，j に対して，次の (ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) をすべて満たす 2 以上の整数 n と 1 以上 100 以下の整数 a_1，a_2，…，a_n が存在するとき，$D_i \longleftrightarrow D_j$ と書くこととする。

(ⅰ) $a_1=i$
(ⅱ) $a_n=j$
(ⅲ) **1 以上 $n-1$ 以下のすべての整数 l に対して，$D_{a_l} \sim D_{a_{l+1}}$**

$i \fallingdotseq j$ のとき，$D_i \longleftrightarrow D_j$ が成り立つかどうかは $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_{100},\ y_{100})$ と r_1，r_2，…，r_{100} の与え方による。

1 以上 100 以下のすべての整数 i に対して，$D_i \longleftrightarrow D_i$ が成り立つ。また，(2) <u>1 以上 100 以下のある整数 i，j に対して，$D_i \longleftrightarrow D_j$ が成り立っているとき，$D_j \longleftrightarrow D_i$ も成り立つ。</u>また，(3) <u>1 以上 100 以下のある整数 i，j，k に対して $D_i \longleftrightarrow D_j$ と $D_j \longleftrightarrow D_k$ が同時に成り立っているとき，$D_i \longleftrightarrow D_k$ も成り立つ。</u>

問 1．$(x_1,\ y_1)=(0,\ 0)$，$(x_2,\ y_2)=(5,\ 1)$，$(x_3,\ y_3)=(9,\ -4)$，$r_1=2$，$r_2=3$，$r_3=4$ とする。このとき，$D_1 \sim D_2$，$D_2 \sim D_3$ がそれぞれ成り立つかどうかを理由を付けて答えよ。
問 2．下線部 (1) の理由を説明せよ。
問 3．1 以上 100 以下のすべての整数 i に対して，$(x_i,\ y_i)=(i,\ i)$，$r_i=1$ とする。このとき，$D_1 \longleftrightarrow D_{100}$ が成り立つかどうかを理由を付けて答えよ。
問 4．下線部 (2) の理由を説明せよ。
問 5．下線部 (3) の理由を説明せよ。

高知大学　医学部医学科　AO 入試 I　総合問題 I

I　a を実数とし，3 次関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-3x+(a-1)^2+1$ とする。このとき，次の設問に答えなさい。

設問 1　$a=1$ のとき，$f(x)$ の増減表を書き，$y=f(x)$ のグラフの概形を書きなさい。
設問 2　$f(x)=0$ が 3 つの相異なる実数解をもつような a の範囲を求めなさい。

設問 3　$f(x)=0$ が実数解を，-2 以上 1 以下の範囲で 1 つ以上もつような a の範囲を求めなさい。

設問 4　$f(x)=0$ が相異なる実数解をちょうど 2 つもつとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる領域の面積を求めなさい。

Ⅱ　a，b を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=(a^2-5b+5)x+a-b$ とする。このとき，次の設問に答えなさい。

設問 1　$-2\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対して，$f(x)\geqq 0$ が成り立つような $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示しなさい。

設問 2　$\displaystyle\int_{-2}^{3}f(x)dx=1$ が成り立つとき，b を a の式で表しなさい。

設問 3　設問 1 で求めた範囲にある $(a,\ b)$ で，$\displaystyle\int_{-2}^{3}f(x)dx=1$ と $\displaystyle\int_{-2}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}$ が同時に成り立つものをすべて求めなさい。

Ⅲ　a_1，a_2，b を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin x+a_1\sin(x-b)+a_2\sin(x-2b)$$

とする。このとき，次の設問に答えなさい。

設問 1　すべての x に対して $f(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ となる c_1，c_2 を a_1，a_2，$\sin b$，$\cos b$ を用いて表しなさい。

設問 2　$a_1=\dfrac{9}{10}$，$a_2=\dfrac{4}{5}$ とする。設問 1 の c_1 を b の関数とみなすとき，b が実数全体を動くときの c_1 の最大値，最小値を求めなさい。

設問 3　$a_2=\dfrac{4}{5}$ とする。設問 1 の c_1，c_2 に対して，${c_1}^2+{c_2}^2$ を a_1，$\cos b$ を用いて表しなさい。

設問 4　設問 3 において，b を定数として，${c_1}^2+{c_2}^2$ を a_1 の関数とみなす。a_1 が実数全体を動くとき，${c_1}^2+{c_2}^2$ が最小となるような a_1 を b を用いて表しなさい。

高知工科大学　経済・マネジメント学群　AO 入試

$\boxed{\text{Ⅰ}}$　次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1)　和 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{2018\cdot 2019}$ を計算せよ。

(2)　x^6-64 を係数が実数の範囲で因数分解せよ。

(3)　n を正の整数とする。互いに区別がつかない n このボールを，4 つの箱A，B，C，D に分けて入れる方法は何通りあるか。ただし，ボールが 1 つも入らない箱があってもよいものとする。

(4)　n を正の整数とし，さいころを n 回投げる。n 回目にはじめて 5 以上の目が出る確率を求めよ。

(5)　$x=1+i$ は方程式 $x^3-5x^2+8x-6=0$ の解の 1 つである。この方程式の他の解をすべて求めよ。

(6)　$\tan^2 15°$ の値を求めよ。

(7)　xy 平面上の放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A，B があり，三角形 OAB は 1 辺の長さが a の正三角形である。a の値を求めよ。

(8)　曲線 $y=|x^2-4|\ (0\leqq x\leqq 3)$ と x 軸，y 軸，直線 $x=3$ で囲まれる 2 つの図形の面積の和を求めよ。

(9)　2 つの空間ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ 5)$ の両方に垂直で，大きさが 1 である空間ベクトルを 1 つ求めよ。

(10)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3\ (n\geqq 1)$ で定まる数列の一般項 a_n を求めよ。

(11)　3 次の項の係数が 1 の 3 次関数 $f(x)$ がある。$y=f(x)$ のグラフは原点 $(0,\ 0)$ を通り，点 $(1,\ 1)$ において直線 $y=1$ と接する。$f(x)$ を求めよ。

(12)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^k$ を 10 で割った余りを求めよ。

$\boxed{\text{Ⅱ}}$　a，b は実数の定数とする。x についての方程式

$$4^x+a\cdot 2^{x+1}+4a^2-b=0 \qquad (*)$$

を考える。次の各問に答えよ。

(1)　$(*)$ が $x=1$ を解にもつとき，a，b の満たす関係式を求めよ。

(2)　$(*)$ が $x=\log_2 3$ を解にもつとき，a，b の満たす関係式を求めよ。

(3)　$(*)$ が $x=1$，$\log_2 3$ を解にもつとき，a，b の値を求めよ。

(4)　l についての 2 次方程式

$$l^2+2al+4a^2-b=0 \qquad (**)$$

が相異なる 2 つの実数解をもつための a，b の条件を求めよ。

(5)　x についての方程式 $(*)$ が相異なる 2 つの実数解をもつための a，b の条件を求めよ。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$　素数は無限に存在することを以下のように 2 部に分けて証明した。これを読み，後の問に答えよ。

$\boxed{\text{第 1 部}}$　自然数 (正の整数) 全体の集合を A で表す。A の部分集合 B が有限個の要素からなるとき，B の要素の個数を $n(B)$ で表す。A の部分集合 B，C が有限個の要素からなるとき

$$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$$

であるから，とくに

$$n(B\cup C)\leqq n(B)+n(C) \quad \cdots ①$$

が成り立つ。同様に，A の部分集合 B_1，B_2，$\cdots$，B_n が有限個の要素からなるとき

$$n(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)\leqq n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_n) \quad \cdots ②$$

が成り立つことがいえる。

$\boxed{\text{第 2 部}}$　第 1 部を踏まえ，素数が無限に存在することを背理法によって証明する。

素数が有限個しかないと仮定し，それらを小さい順に p_1，p_2，$\cdots$，p_r (r は素数の個数) とする。例えば $p_1=2$，$p_3=3$，$p_3=5$ であり，また p_r は (存在していると仮定している) 最大の素数である。

(ア) $i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$ に対し，${p_i}^2$ の倍数である自然数全体の集合を S_i とする。$S_i\subset A$ である。$c=p_1p_2\cdots p_r$ とおき，c 以下の自然数全体の集合を T とする。$T\subset A$ である。

$n>c$ をみたす任意の自然数 n に対して，n が ${p_i}^2$ で割り切れるような番号 i がとれる。なぜなら，n の素因数分解は

$$n={p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_r}^{e_r}\ (e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_r \text{ は 0 以上の整数})$$

の形になるが，どの i についても n が ${p_i}^2$ で割り切れないと仮定すると，e_1，e_2，$\cdots$，e_r はすべて 1 以下となるので $n\leqq p_1p_2\cdots p_r$ が成り立つことになり，(イ) 矛盾が生じるからである。よって，

$n > c$ のとき，$n \in S_i$ となる番号 i がとれる。

A の部分集合 B と自然数 k に対して，B の要素のうち k 以下であるもの全体を $B^{(k)}$ で表す (例えば $A^{(k)} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$ である)。すると k 以下の自然数 n に対して，$n \leqq c$ なら $n \in T^{(k)}$，$n > c$ ならある番号 i について $n \in S_i{}^{(k)}$ である。
よって

$$A^{(k)} = S_1{}^{(k)} \cup S_2{}^{(k)} \cup \cdots \cup S_r{}^{(k)} \cup T^{(k)}$$

が成り立つ。すると，② より，任意の自然数 k に対して

$$k = n(A^{(k)}) \leqq_{(ウ)} \underline{\sum_{i=1}^{r} n(S_i{}^{(k)}) + n(T^{(k)}) \leqq \sum_{i=1}^{r} \frac{k}{p_i{}^2} + c} = k\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i{}^2} + c$$

すなわち

$$1 \leqq \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i{}^2} + \frac{c}{k} \quad \cdots ③$$

が成り立つ。しかし，$p_i < d\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ をみたす自然数 d をとると

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i{}^2} < \sum_{j=2}^{d} \frac{1}{j^2} < \sum_{j=2}^{d} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{d} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = 1 - \frac{1}{d}$$

なので，不等式 ③ は $_{(エ)}$ $\underline{k > cd \text{ のとき成り立たず，}}$矛盾が生じる。

[設問]

(1)　不等式 ① に関して次の問に答えよ。20 以下の自然数のうち，2 の倍数からなる集合を P，3 の倍数からなる集合を Q とする。$n(P) + n(Q)$ と $n(P \cup Q)$ をそれぞれ求め，どちらが大きいか述べよ。

(2)　(1) に加えて，20 以下の自然数のうち，5 の倍数からなる集合を R とする。$n(P) + n(Q) + n(R)$ と $n(P \cup Q \cup R)$ をそれぞれ求め，どちらが大きいか述べよ。

(3)　不等式 ② について，$r = 3$ のときは ① を 2 回使って

$$\begin{aligned} n(B_1 \cup B_2 \cup B_3) &= n((B_1 \cup B_2) \cup B_3) \\ &\leqq n(B_1 \cup B_2) + n(B_3) \\ &\leqq n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

と導かれる。ここで，図 1 の斜線部 $(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ は図 2 の斜線部 $(B_1 \cup B_2)$ と図 3 の斜線部 (B_3) の和集合であることを使った。

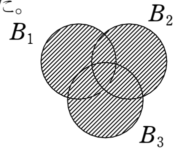

図 1：$B_1 \cup B_2 \cup B_3$

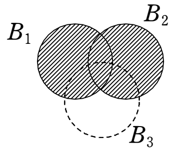

図 2：$B_1 \cup B_2$

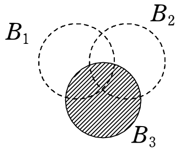

図 3：B_3

④ を導いたのと同様の考え方を用いて，② を $r = 4$ の場合に示せ。

(4)　下線部 (ア) に関して，S_1 の要素のうち，50 以下のものをすべて挙げると

4，8，12，16，20，24，28，32，36，40，44，48

である。第 2 部で導入した記号を用いてかくと

$$S_1{}^{(50)} = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40,\ 44,\ 48\}$$

である。S_2 の要素のうち，50 以下のもの (つまり $S_2{}^{(50)}$ の要素) をすべて挙げよ。

(5)　下線部 (ア) に関して，S_3 の要素のうち，50 以下のもの (つまり $S_3{}^{(50)}$ の要素) をすべて挙げよ。

(6)　下線部 (イ) の理由をわかりやすく説明せよ。

(7)　下線部 (ウ) について，$n(S_i{}^{(k)}) = a$ とおく。$S_i{}^{(k)}$ の要素のうち，最大のものを a，p_i を用いて表せ。さらに，

$$n(S_i{}^{(k)}) \leqq \frac{k}{p_i{}^2}$$ となる理由をわかりやすく説明せよ。

(8)　下線部 (エ) の理由をわかりやすく説明せよ。

3　まとめ

平成 31 年度の四国地方の AO 入試と推薦入試の問題の中で，数学の内容に関するものを取り上げた。平成 30 年度の問題と比較してみると，愛媛大学理学部が改組の関係か AO 入試がなくなっていた。また，香川大学創造工学部が小論文は理科的な内容であった。高知大学は、理学部は問題文で数学的な内容を説明して問題を解かせるような読解力を問う問題で，医学部医学科は総合問題 I に数学と理科の問題を出題していた。高知工科大学の経済･マネジメント学群は，小問集合と大問，読解力を問う問題と幅広く出題していた。例年出題している大学は，出題傾向は昨年度と大きく変わるところはなく，過去問を利用して指導をしていく必要性を改めて感じた。また，小論文や総合問題においては，理科的な内容が多くみられたが，グラフや表の読み取りや計算などは数学とつながる要素もあり，他教科の教員と連携して指導をしていく必要性を感じた。